

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

CAPITOLUL I

CALCULUL REACȚIUNILOR

Determinarea răspunsului unei structuri static determinate la acțiunea încărcărilor exterioare - eforturi și deplasări - începe cu calculul reacțiunilor.

Reacțiunile structurilor static determinate se obțin cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static, utilizând metodele Mecanicii Teoretice - metoda separării corpurilor și metoda solidificării. Metoda solidificării este cea mai eficientă deoarece elimină calculul forțelor din legăturile interioare.

Dacă sunt de calculat reacțiunile unui singur corp, atunci numărul de necunoscute este de trei și egal cu numărul de ecuații de echilibru static. Pentru structurile dezvoltate, cu un număr de reacțiuni mai mare de trei, se scriu ecuații suplimentare de moment egal cu zero, în raport cu articulațiile interioare.

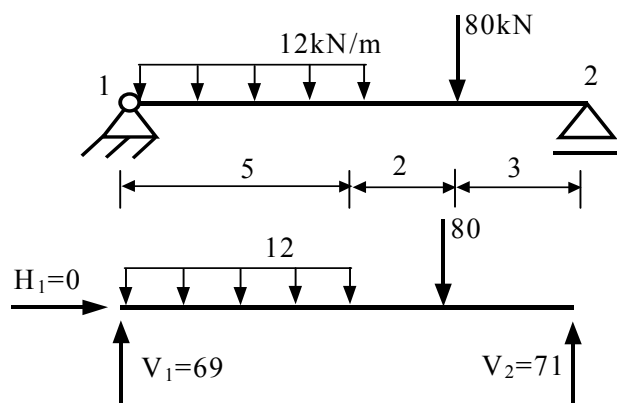
O rezolvare eficientă a problemei reacțiunilor constă în a scrie ecuații cu o singură necunoscută. De asemenea, este necesar ca rezultatele calculului să fie verificate pentru că reacțiunile sunt utilizate ulterior pentru calculul eforturilor și orice greșeală în calculul lor se transmite și asupra eforturilor.

Utilizarea lucrului mecanic virtual pentru calculul reacțiunilor va fi tratată într-un alt capitol.

APLICAȚII

Să se determine reacțiunile din reazeme la următoarele elemente și structuri static determinate.

Problema 1.1(fig.1.1)



Se eliberează grinda de legăturile cu baza de susținere și în locul acestora se introduce echivalentul mecanic corespunzător.

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 10 - 12 \cdot 5 \cdot 7.5 - 80 \cdot 3 = 0$$

$$V_1 = 69 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 12 \cdot 5 \cdot 7.5 + 80 \cdot 7 - V_2 \cdot 10 = 0$$

$$V_2 = 71 \text{ kN}$$

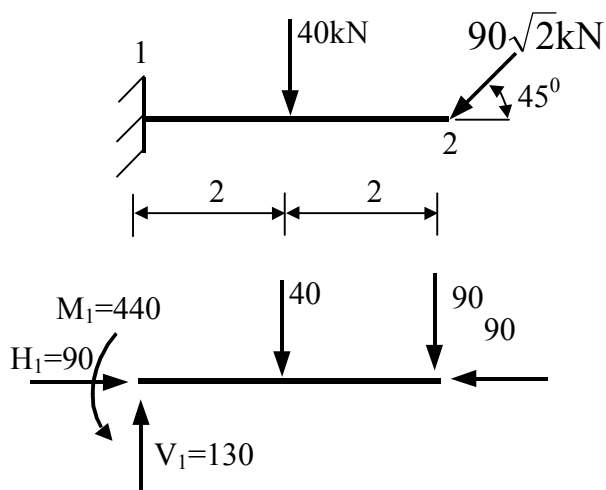
- Fig.1.1 -

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 12 \cdot 5 - 80 + V_2 = 69 - 60 - 80 + 71 = 0$$

Deci reacțiunile au fost corect calculate.. Reacțiunile V_1 și V_2 au rezultat cu semnul plus deci sensul adoptat inițial este cel corect.

Problema 1.2 (fig.1.2)



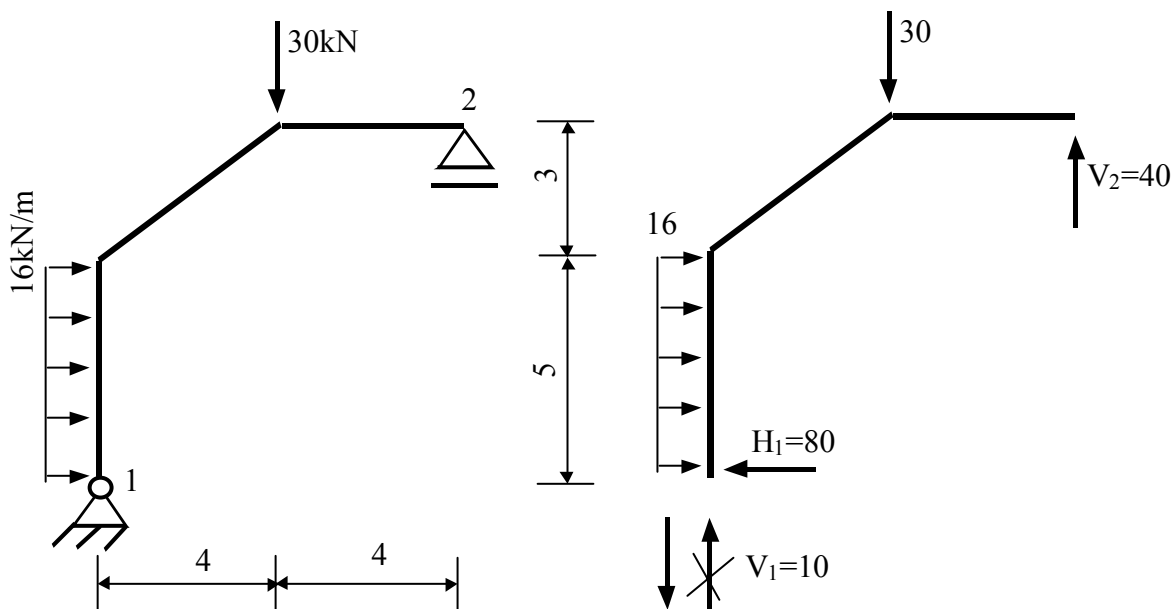
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad H_1 - 90 = 0; \quad H_1 = 90\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; \quad V_1 - 40 - 90 = 0; \quad V_1 = 130\text{kN} \\ \sum M_i &= 0; \quad -M_1 + 40 \cdot 2 + 90 \cdot 4 = 0; \\ &\quad M_1 = 440\text{kNm} \end{aligned}$$

Verificare:

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0; \\ -M_1 + V_1 \cdot 4 - 40 \cdot 2 &= -440 + 520 - 80 = 0 \end{aligned}$$

- Fig.1.2 -

Problema 1.3 (fig.1.3)



- Fig.1.3 -

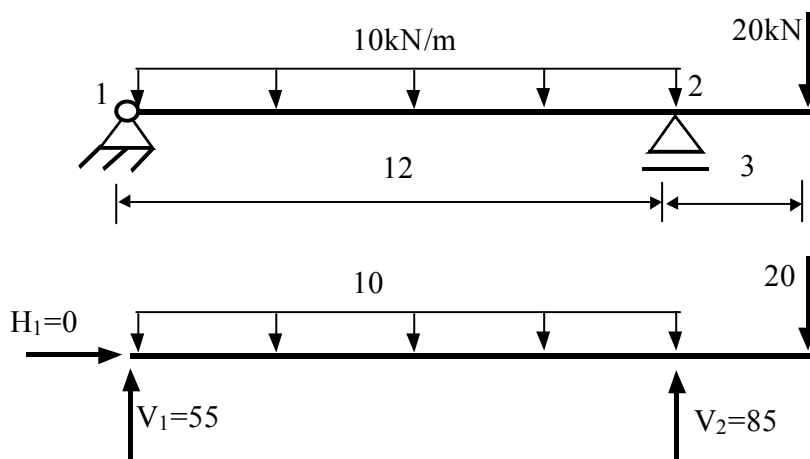
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad 16 \cdot 5 - H_1 = 0; \quad H_1 = 80\text{kN} \\ \sum M_i &= 0; \quad 16 \cdot 5 \cdot 2,5 + 30 \cdot 4 - V_2 \cdot 8 = 0; \quad V_2 = 40\text{kN} \end{aligned}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 8 + 80 \cdot 8 - 16 \cdot 5 \cdot 5,5 - 30 \cdot 4 = 0; \quad V_1 = -10 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad V_1 + 30 - V_2 = 10 + 30 - 40 = 0$$

Sensul real al reacțiunii V_1 este invers celui considerat inițial. Ulterior în calcul se va lucra cu sensul real și cu valoarea $V_1=10\text{kN}$.

Problema 1.4 (fig.1.4)



- Fig.1.4 -

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 10 \cdot 12 \cdot 6 - V_2 \cdot 12 + 20 \cdot 15 = 0; \quad V_2 = 85 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 1 - 10 \cdot 12 \cdot 6 + 20 \cdot 3 = 0; \quad V_1 = 55 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad V_1 - 10 \cdot 12 + V_2 - 20 = 55 - 120 + 85 - 20 = 0$$

Problema 1.5 (fig.1.5)

Calculul se va efectua utilizând în ordine metoda separării corpurilor și apoi metoda solidificării.

1) Metoda separării corpurilor

Calculul începe cu grinda 3-4

$$\sum X_i = 0; \quad H_3 = 0$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 15 \cdot 8 \cdot 4 - V_4 \cdot 6 = 0; \quad V_4 = 80 \text{ kN}$$

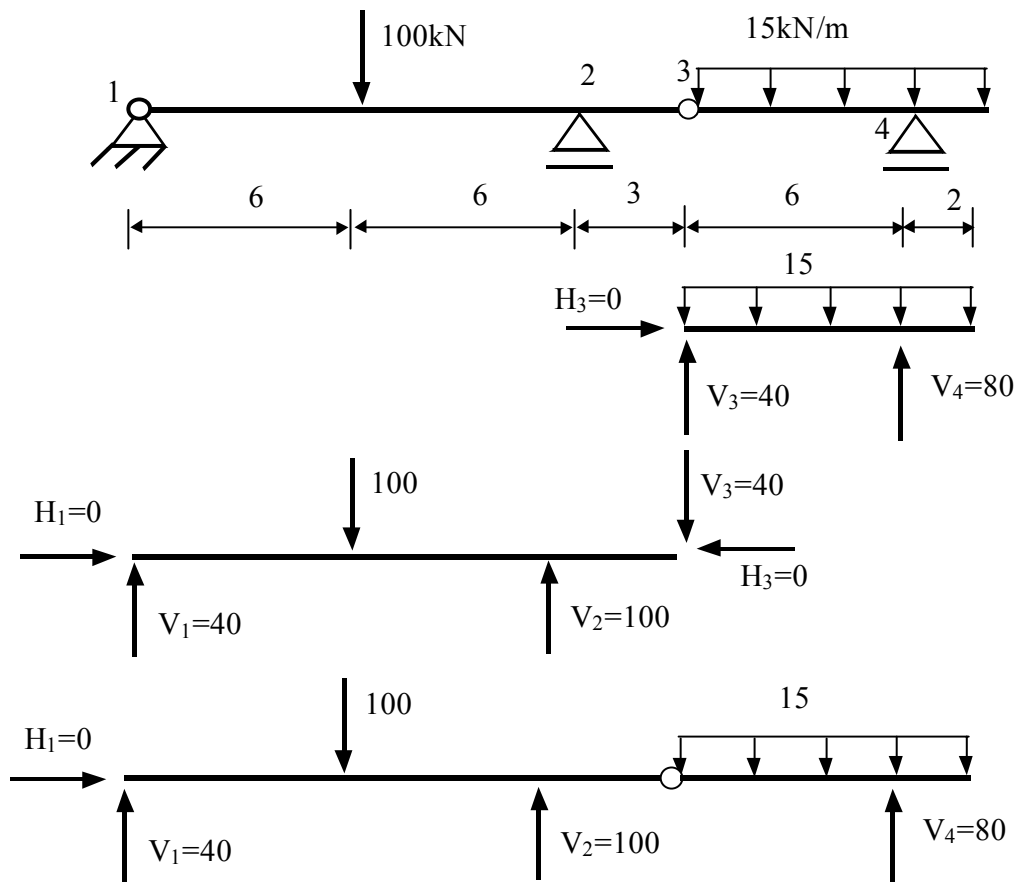
$$\sum M_4 = 0; \quad V_3 \cdot 6 - 15 \cdot 8 \cdot 2 = 0; \quad V_3 = 40 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad 40 - 15 \cdot 8 + 80 = 0$$

Grinda 1-2-3

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; \quad V_1 \cdot 12 - 100 \cdot 6 + 40 \cdot 3 = 0; \quad V_1 = 40 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; \quad 100 \cdot 6 - V_2 \cdot 12 + 40 \cdot 15 = 0; \quad V_2 = 100 \text{ kN} \\ \text{Verificare } \sum Y_i &= 0; \quad 40 - 100 + 100 - 40 = 0\end{aligned}$$



- Fig.1.5 -

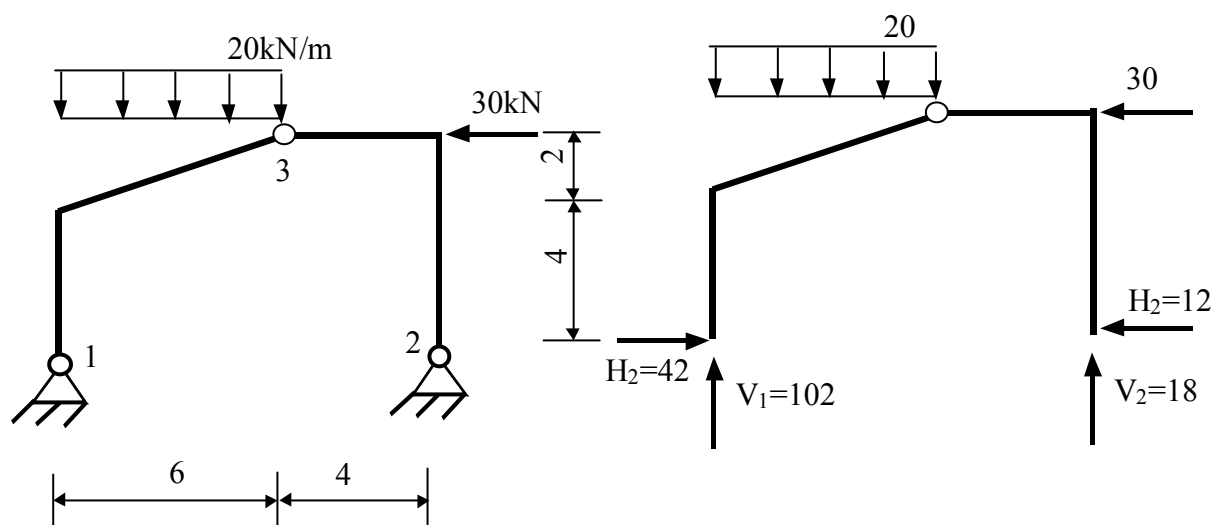
2) Metoda solidificării

Deoarece sunt patru necunoscute H_1 , V_1 , V_2 , V_4 se scriu cele trei ecuații de echilibru static și o condiție suplimentară de moment egal cu zero în articulația interioară 3, fie pentru forțele de la stânga, fie pentru forțele de la dreapta. Ordinea în care se scriu aceste ecuații este guvernată de ideea de a obține ecuații cu câte o singură necunoscută (dacă este posibil).

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad H_1 = 0 \\ \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; \quad 15 \cdot 8 \cdot 4 - V_4 \cdot 6 = 0; \quad V_4 = 80 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= 0; \quad V_1 \cdot 12 - 100 \cdot 6 + 15 \cdot 8 \cdot 7 - 80 \cdot 9 = 0; \quad V_1 = 40 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; \quad 100 \cdot 6 - V_2 \cdot 12 + 15 \cdot 8 \cdot 19 - 80 \cdot 21 = 0; \quad V_2 = 100 \text{ kN}\end{aligned}$$

Au fost obținute aceleași valori ca prin metoda izolării corpurilor.

Problema 1.6 (fig.1.6)



- Fig.1.6 -

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 10 - 20 \cdot 6 \cdot 7 - 30 \cdot 6 = 0; \quad V_1 = 102 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - 30 \cdot 6 - V_2 \cdot 10 = 0; \quad V_2 = 18 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad 102 - 20 \cdot 6 + 18 = 0$$

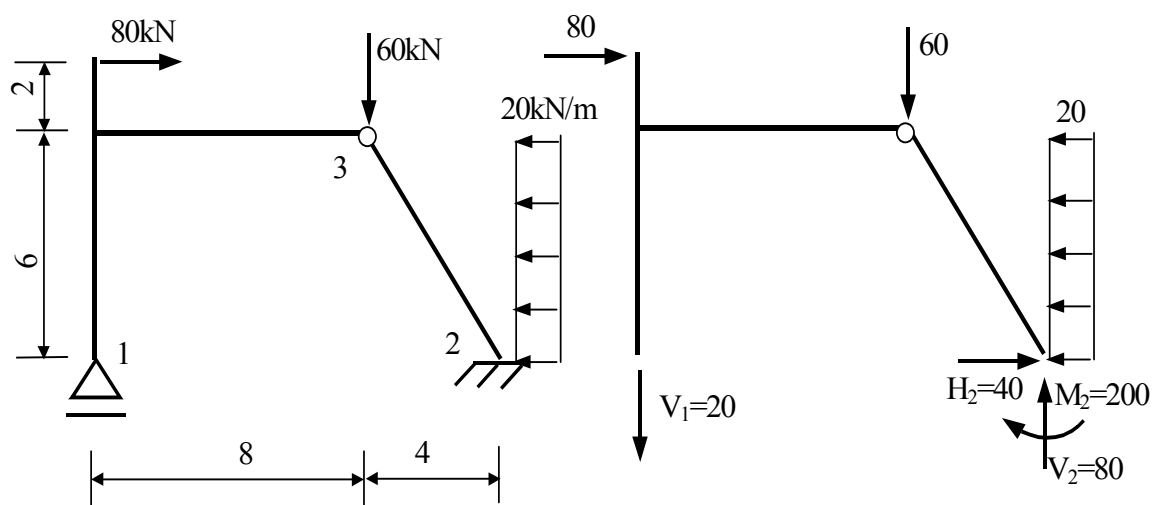
$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 102 \cdot 6 - H_1 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad H_1 = 42 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 6 - 18 \cdot 4 = 0; \quad H_2 = 12 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum X_i = 0; \quad 42 - 30 - 12 = 0$$

Reacțiunea H_2 se putea calcula din ecuația de proiecție, iar verificarea se efectua scriind condiția de moment zero în raport cu articulația interioară 3, pentru forțele de la dreapta.

Problema 1.7 (fig.1.7)

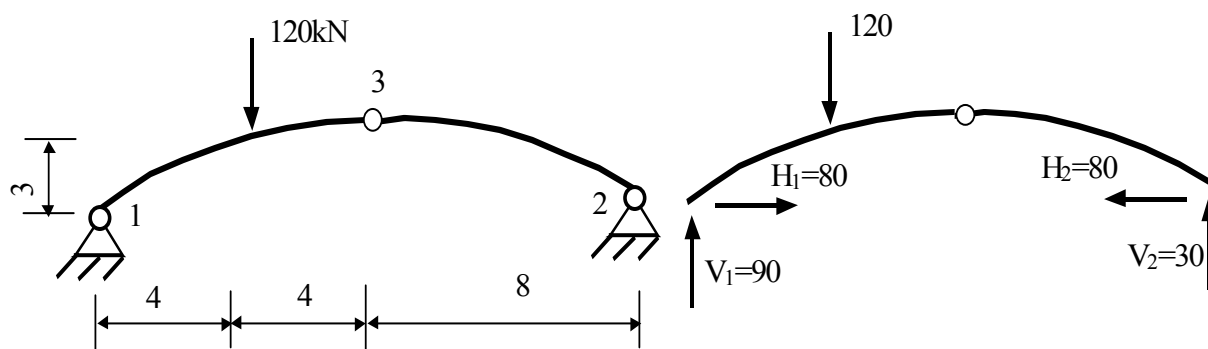


- Fig.1.7 -

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 80 \cdot 2 - V_1 \cdot 8 = 0; \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad H_2 - 20 \cdot 6 + 80 = 0; \quad H_2 = 40 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= 0; \quad 80 \cdot 8 - 20 \cdot 12 - 60 \cdot 4 - 20 \cdot 6 \cdot 3 + M_2 = 0; \quad M_2 = 200 \text{ kNm} \\ \sum Y_i &= 0; \quad -20 - 60 + V_2 = 0; \quad V_2 = 80 \text{ kN} \\ \text{Verificare} \\ \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; \quad -40 \cdot 6 - 80 \cdot 4 + 200 + 20 \cdot 6 \cdot 3 = -560 + 560 = 0\end{aligned}$$

Problema 1.8 (fig.1.8)



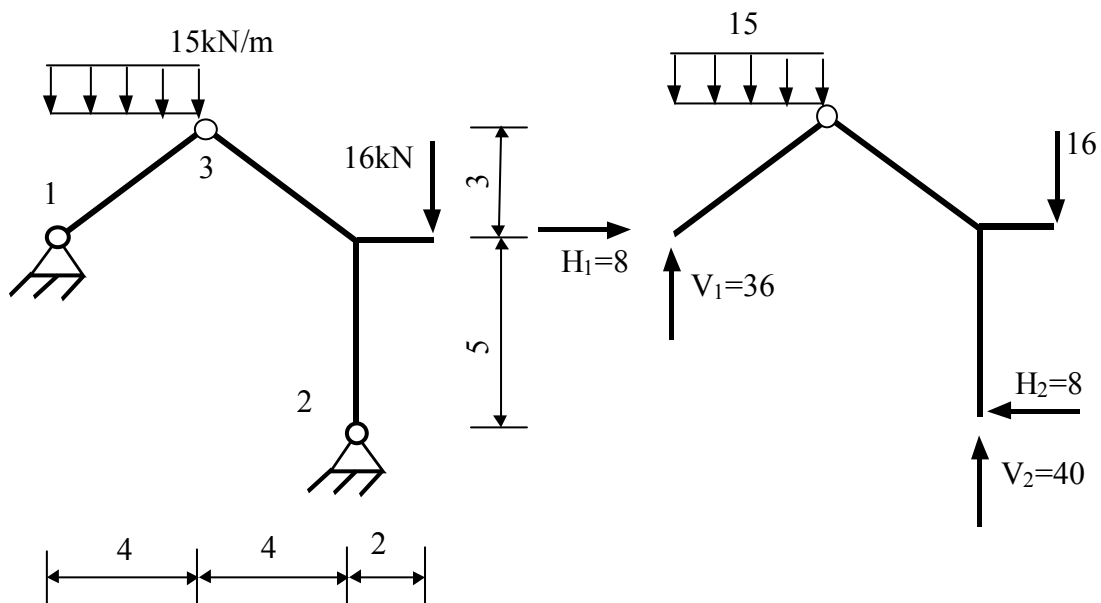
- Fig.1.8 -

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; \quad V_1 \cdot 16 - 120 \cdot 12 = 0; \quad V_1 = 90 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; \quad 120 \cdot 4 - V_2 \cdot 16 = 0; \quad V_2 = 30 \text{ kN} \\ \text{Verificare } \sum Y_i &= 0; \quad 90 - 120 + 30 = 0 \\ \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; \quad H_2 \cdot 3 - 30 \cdot 8 = 0; \quad H_2 = 80 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{st}} &= 0; \quad 90 \cdot 8 - H_1 \cdot 3 - 120 \cdot 4 = 0; \quad H_1 = 80 \text{ kN} \\ \text{Verificare } \sum X_i &= 0; \quad 80 - 80 = 0\end{aligned}$$

Problema 1.9 (fig.1.9)

În acest caz nu mai este posibil să se scrie ecuații cu o singură necunoscută, deoarece reazemele nu mai sunt la același nivel. Se va alcătui un sistem de două ecuații cu două necunoscute și după rezolvarea acestuia se vor determina și celelalte două necunoscute.

$$\begin{aligned}\sum M_3^{\text{st}} &= 0; \quad V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot 3 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \\ \sum M_2 &= 0; \quad V_1 \cdot 8 + H_1 \cdot 5 - 15 \cdot 4 \cdot 6 + 16 \cdot 2 = 0\end{aligned}$$



-Fig.1.9 -

Din rezolvarea sistemului de ecuații rezultă $H_1 = 8\text{kN}$ și $V_1 = 36\text{kN}$

Din ecuațiile de proiecție pentru ansamblu se obține:

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - H_2 = 0; \quad H_2 = 8\text{kN}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad 36 - 15 \cdot 4 + V_2 - 16 = 0; \quad V_2 = 40\text{kN}$$

$$\text{Verificare } \sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad 8 \cdot 8 - 40 \cdot 4 + 16 \cdot 6 = 160 - 160 = 0$$

Problema 1.10 (fig.1.10)

$$\sum M_4^{\text{st}} = 0; \quad V_1 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_1 = 30\text{kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 30 \cdot 6 - 15 \cdot 6 \cdot 3 + 150 - V_3 \cdot 12 = 0; \quad V_3 = 5\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 30 \cdot 18 - 15 \cdot 6 \cdot 15 + 150 + V_2 \cdot 12 = 0; \quad V_2 = 55\text{kN}$$

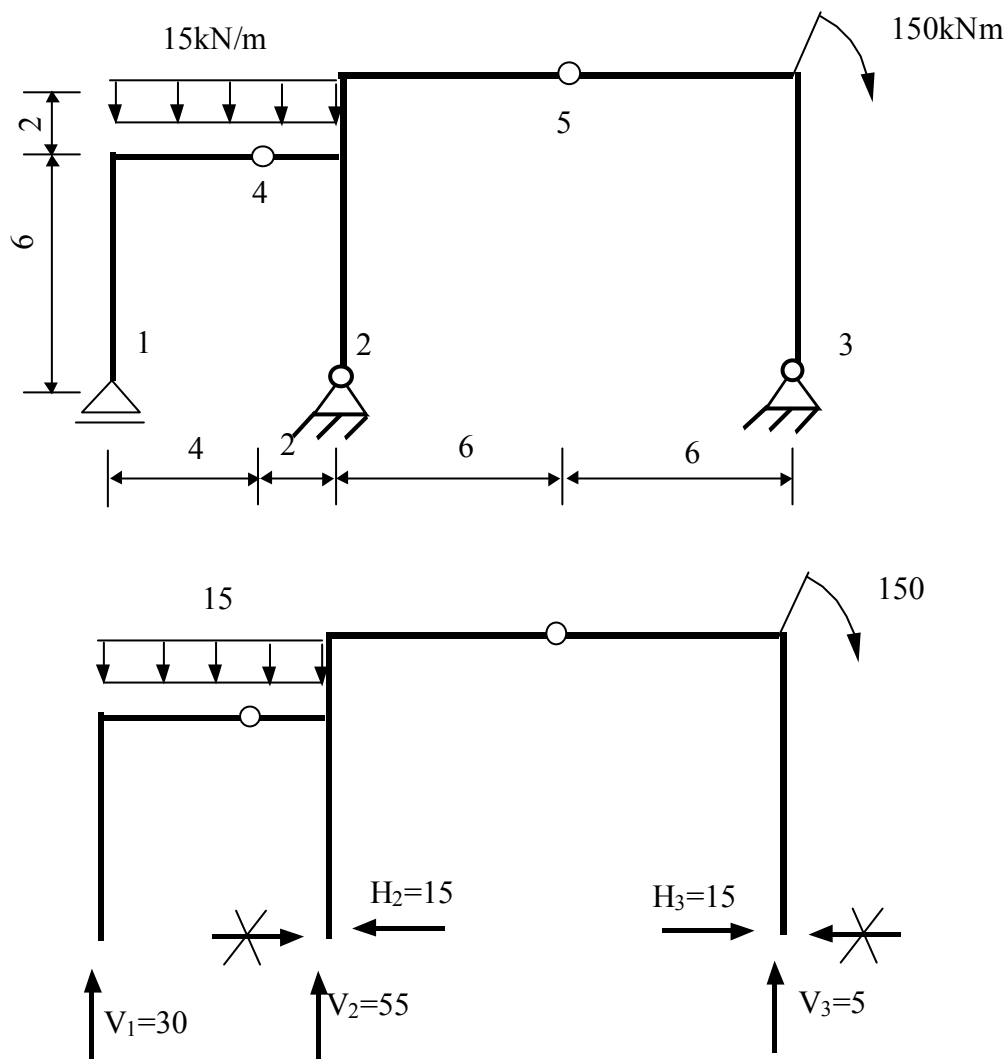
$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad 30 - 15 \cdot 6 + 55 + 5 = 0$$

$$\sum M_5^{\text{dr}} = 0; \quad H_3 \cdot 8 - 5 \cdot 6 + 150 = 0; \quad H_3 = -15\text{kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad H_2 - H_3 = 0; \quad H_2 = -15\text{kN}$$

Verificare

$$\sum M_5^{\text{st}} = 0; \quad 30 \cdot 12 - 5 \cdot 6 \cdot 9 + 55 \cdot 6 + 15 \cdot 8 = 810 - 810 = 0$$



- Fig.1.10 -

Problema 1.11(fig.1.11)

Din condițiile de echilibru ale structurii în ansamblu se pot calcula reacțiunile verticale V_1 și V_2 și se poate obține o relație între H_1 și H_2 , dar nu se poate determina valoarea acestora. De aceea, în asemenea situații se separă partea superioară de cea inferioară. Se analizează mai întâi partea superioară, ca fiind o parte secundară și apoi partea inferioară.

Calculul părții superioare

$$\sum M_5 = 0; \quad 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - V_4 \cdot 12 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \quad V_4 = 15 \text{ kN}$$

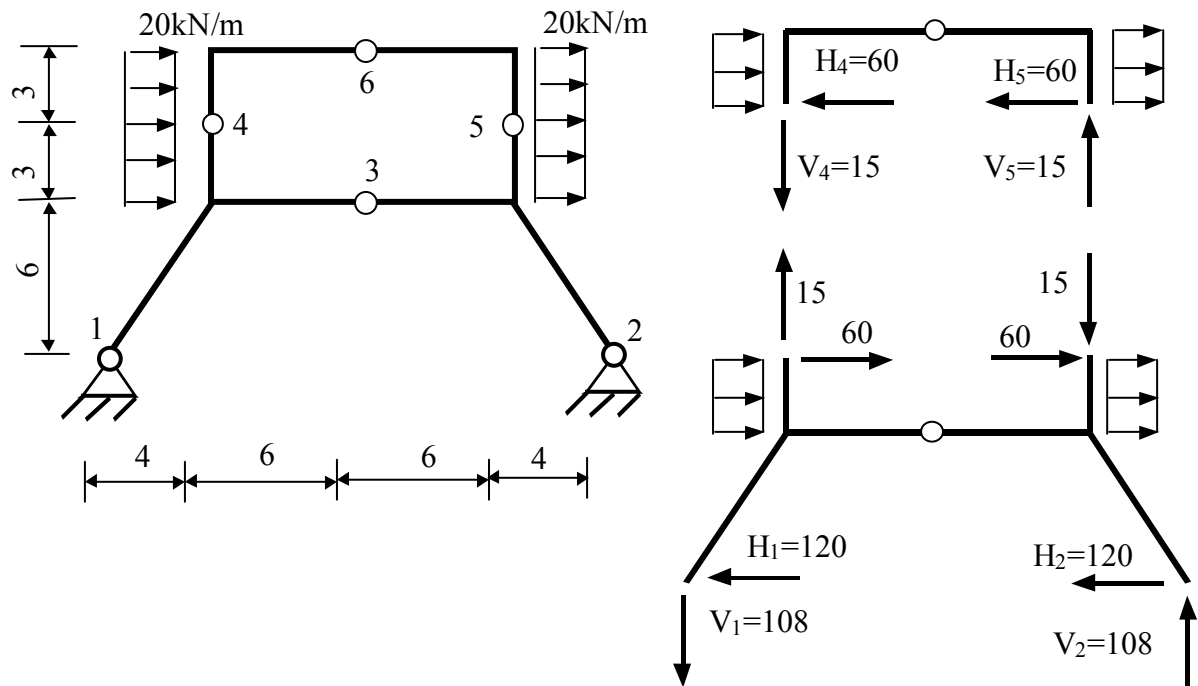
$$\sum M_4 = 0; \quad 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - V_5 \cdot 12 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \quad V_5 = 15 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad -15 + 15 = 0$$

$$\sum M_6^{st} = 0; \quad H_4 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 15 \cdot 6 = 0; \quad H_4 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad -60 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 3 - H_5 = 0; \quad H_5 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum M_6^{dr} = 0; \quad H_5 \cdot 3 - V_5 \cdot 6 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 60 \cdot 3 - 15 \cdot 6 - 90 = 0$$



- Fig.1.11 -

Calculul părții inferioare

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 20 + 60 \cdot 9 + 20 \cdot 3 \cdot 7,5 + 15 \cdot 16 + 60 \cdot 9 - 15 \cdot 4 + 20 \cdot 3 \cdot 7,5 = 0$$

$$V_1 = 108 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 60 \cdot 9 + 20 \cdot 3 \cdot 7,5 - 15 \cdot 4 + 60 \cdot 9 + 15 \cdot 16 + 20 \cdot 3 \cdot 7,5 - V_2 \cdot 20 = 0;$$

$$V_2 = 108 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad -108 + 15 - 15 + 108 = 0$$

$$\sum M_3^{st} = 0; \quad H_1 \cdot 6 - 108 \cdot 10 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + 60 \cdot 3 + 15 \cdot 6 = 0;$$

$$H_1 = 120 \text{ kN}$$

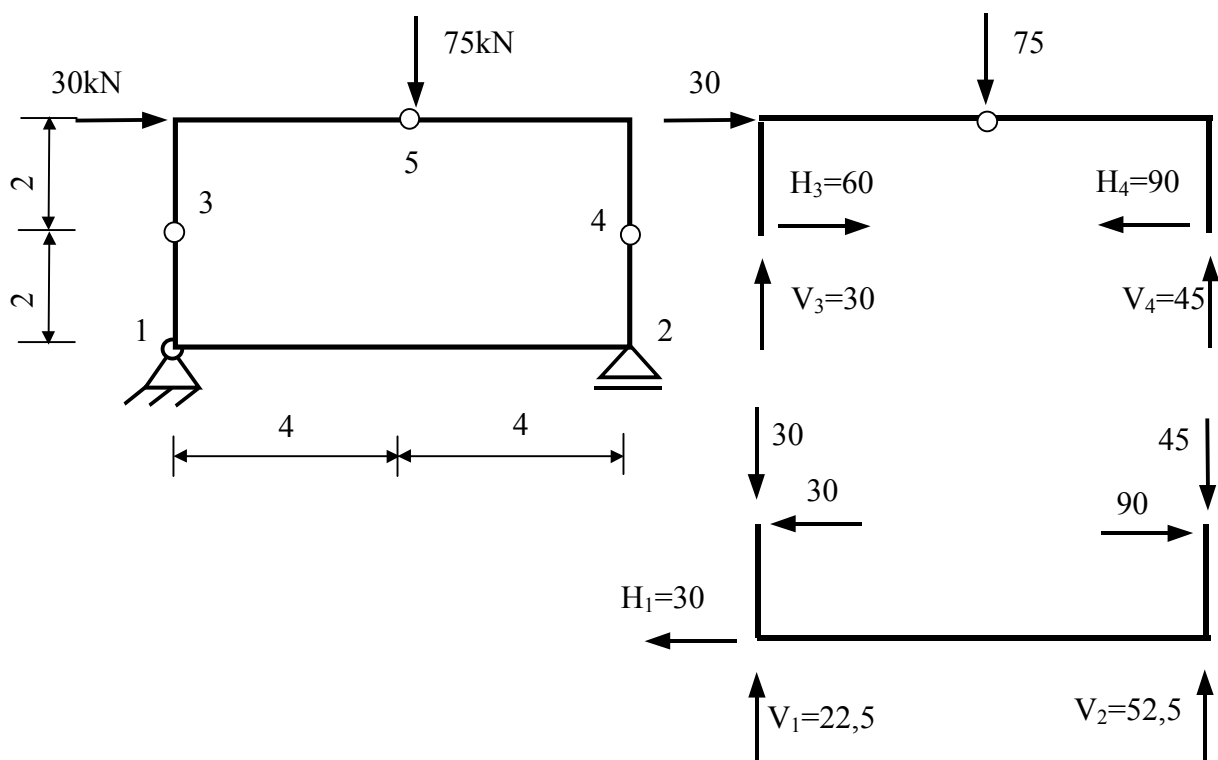
$$\sum M_3^{dr} = 0; \quad H_2 \cdot 6 - 108 \cdot 10 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + 60 \cdot 3 + 15 \cdot 6 = 0;$$

$$H_2 = 120 \text{ kN}$$

Verificare $\sum X_i = 0$; $120 - 20 \cdot 3 - 60 - 20 \cdot 3 - 60 + 120 = 0$

Problema 1.12(fig.1.12)

În acest caz structura fiind simplu rezemată reacțiunile V_1 , H_1 și V_2 pot fi calculate din echilibrul structurii în ansamblu, dar, așa cum se va vedea într-un alt capitol eforturile nu vor putea fi calculate dacă nu se cunosc forțele din articulațiile interioare 3 și 4.



- Fig.1.12 -

Calculul structurii în ansamblu

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - 30 = 0; \quad H_1 = 30\text{kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 30 \cdot 4 + V_1 \cdot 8 - 75 \cdot 4 = 0; \quad V_1 = 22,5\text{kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 \cdot 4 + 75 \cdot 4 - V_2 \cdot 8 = 0; \quad V_2 = 52,5\text{kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0$; $22,5 - 75 + 52,5 = 0$

Calculul părții superioare

$$\sum M_4 = 0; \quad 30 \cdot 2 + V_3 \cdot 8 - 75 \cdot 4 = 0; \quad V_3 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 30 \cdot 2 + 75 \cdot 4 - V_4 \cdot 8 = 0; \quad V_4 = 45 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0; \quad 30 - 75 + 45 = 0$

$$\sum M_5^{\text{st}} = 0; \quad 30 \cdot 4 - H_3 \cdot 2 = 0; \quad H_3 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_5^{\text{dr}} = 0; \quad H_4 \cdot 2 - 45 \cdot 4 = 0; \quad H_4 = 90 \text{ kN}$$

Verificare $\sum X_i = 0; \quad 30 + 60 - 90 = 0$

Calculul părții inferioare

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 8 - 60 \cdot 2 + 90 \cdot 2 = 0; \quad V_1 = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -60 \cdot 2 + 45 \cdot 8 + 90 \cdot 2 - V_2 \cdot 8 = 0; \quad V_2 = 52,5 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0; \quad 22,5 - 75 + 52,5 = 0$

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 + 60 - 90 = 0; \quad H_1 = 30 \text{ kN}$$

Problema 1.13 (fig.1.13)

Calculul părții superioare

$$\sum M_8 = 0; \quad 30 \cdot 2 - V_7 \cdot 6 = 0; \quad V_7 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_7 = 0; \quad 30 \cdot 2 - V_8 \cdot 6 = 0; \quad V_8 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_9^{\text{st}} = 0; \quad H_7 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 0; \quad H_7 = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_9^{\text{dr}} = 0; \quad H_8 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 0; \quad H_8 = 15 \text{ kN}$$

Calculul părții mijlocii

$$\sum M_5 = 0; \quad 15 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 6 - V_4 \cdot 6 + 15 \cdot 4 = 0; \quad V_4 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0; \quad 15 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 10 \cdot 6 - V_5 \cdot 6 = 0; \quad V_5 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_6^{\text{st}} = 0; \quad H_4 \cdot 2 - 40 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 0; \quad H_4 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_6^{\text{dr}} = 0; \quad 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + H_5 \cdot 2 - 40 \cdot 3 = 0; \quad H_5 = 30 \text{ kN}$$

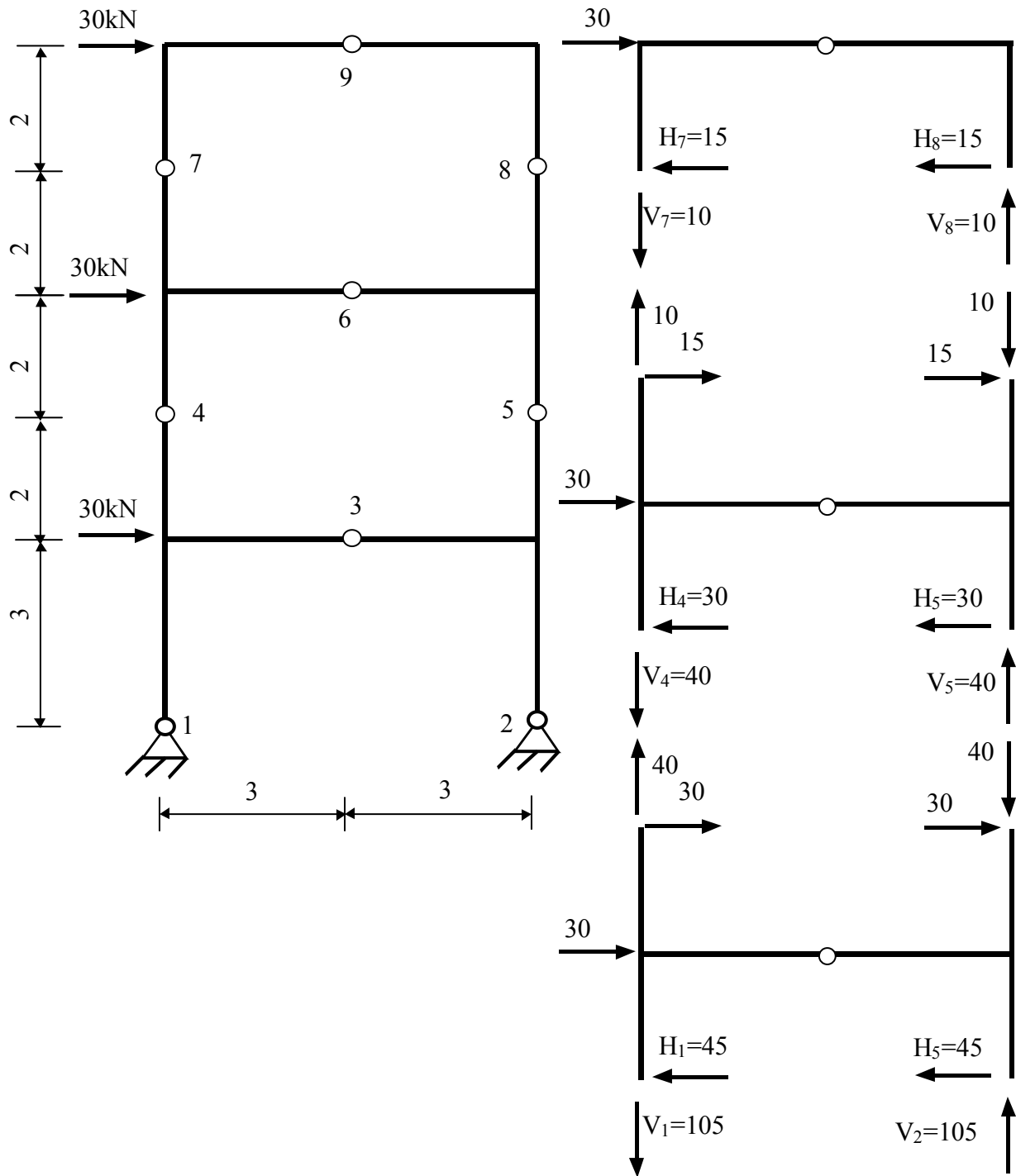
Calculul părții inferioare

$$\sum M_2 = 0; \quad 30 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 30 \cdot 3 - V_1 \cdot 6 + 30 \cdot 5 = 0; \quad V_1 = 105 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 40 \cdot 6 - V_2 \cdot 6 = 0; \quad V_2 = 105 \text{ kN}$$

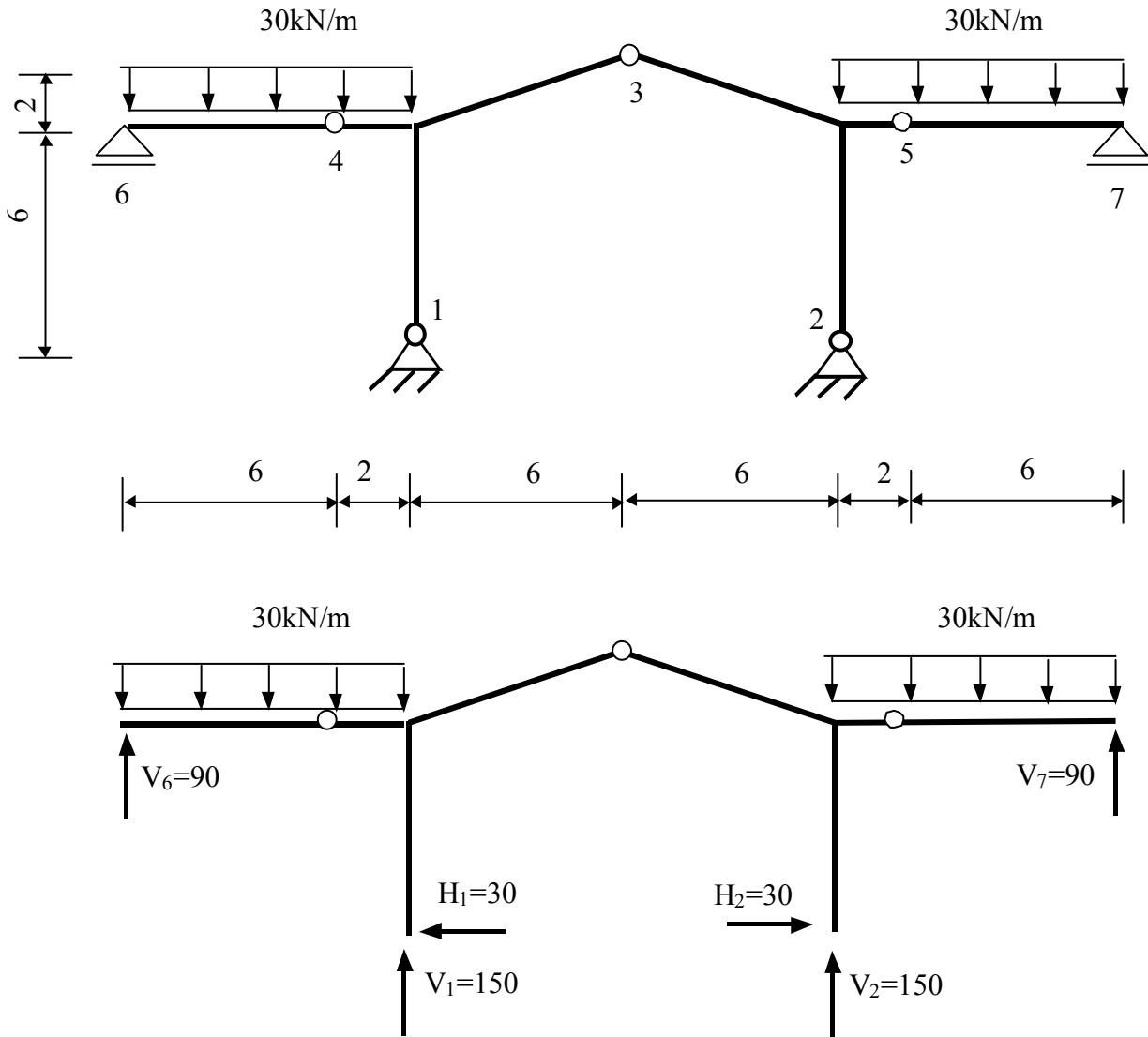
$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 3 - 105 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 0; \quad H_1 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 3 - 105 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 0; \quad H_2 = 45 \text{ kN}$$



- Fig.1.13 -

Problema 1.14 (fig.1.14)



- Fig.1.14 -

$$\begin{aligned} \sum M_4^{st} &= 0; \quad V_6 \cdot 6 - 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad V_6 = 90 \text{ kN} \\ \sum M_5^{dr} &= 0; \quad 30 \cdot 6 \cdot 3 - V_7 \cdot 6 = 0; \quad V_7 = 90 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= 0; \quad 90 \cdot 20 - 30 \cdot 8 \cdot 16 + V_1 \cdot 12 + 30 \cdot 8 \cdot 4 - 90 \cdot 8 = 0; \quad V_1 = 150 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; \quad 90 \cdot 8 - 30 \cdot 8 \cdot 4 - V_2 \cdot 12 + 30 \cdot 8 \cdot 16 - 90 \cdot 20 = 0; \quad V_2 = 150 \text{ kN} \\ \text{Verificare } \sum Y_i &= 0; \quad 90 - 30 \cdot 8 + 150 + 150 - 30 \cdot 8 + 90 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_3^{st} &= 0; \quad 90 \cdot 14 - 30 \cdot 8 \cdot 10 + 150 \cdot 6 + H_1 \cdot 8 = 0; \quad H_1 = 30 \text{ kN} \\ \sum M_3^{dr} &= 0; \quad -150 \cdot 6 - H_2 \cdot 8 + 30 \cdot 8 \cdot 10 - 90 \cdot 14 = 0; \quad H_2 = 30 \text{ kN} \\ \text{Verificare } \sum X_i &= 0; \quad -30 + 30 = 0 \end{aligned}$$

CAPITOLUL II

GRINDA DREAPTĂ

În acest capitol va fi prezentat calculul eforturilor la grinda dreaptă și anume – grinda în consolă, grinda simplu rezemată fără consolă și grinda simplu rezemată cu una sau două console.

Diagramele de eforturi prezintă următoarele particularități:

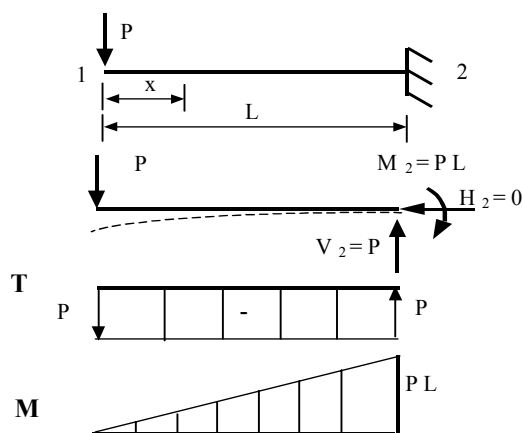
- dacă într-o secțiune se află aplicată o forță în lungul axei barei sau o forță înclinată cu proiecție pe axa barei, atunci în diagrama de forță axială are loc un salt egal cu valoarea forței aplicate,
- dacă într-o secțiune se află aplicată o forță concentrată normală pe axa barei sau o forță înclinată cu proiecție pe normala la axa barei, atunci în diagrama de forță tăietoare are loc un salt în sensul forței și egal cu valoarea forței,
- dacă într-o secțiune se află aplicat un moment concentrat atunci în diagrama de moment încovoietor are loc un salt, în sensul momentului și egal cu valoarea sa
- în secțiunea în care se anulează forța tăietoare momentul încovoietor înregistrează o valoare extremă – maximă sau minimă.

Diagramele de forță axială și de forță tăietoare vor fi afectate de semne – conform convenției prezentate în Introducere, iar diagrama de moment încovoietor va fi reprezentată de partea fibrei întinse prin încovoiere și nu va fi afectată de semne.

APLICAȚII

A. CALCULUL EFORTURILOR. Să se calculeze reacțiunile și să se traseze diagramele de eforturi la următoarele grinzi drepte.

Problema 2.1 (fig.2.1)



- Fig.2.1 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_2 = 0$$

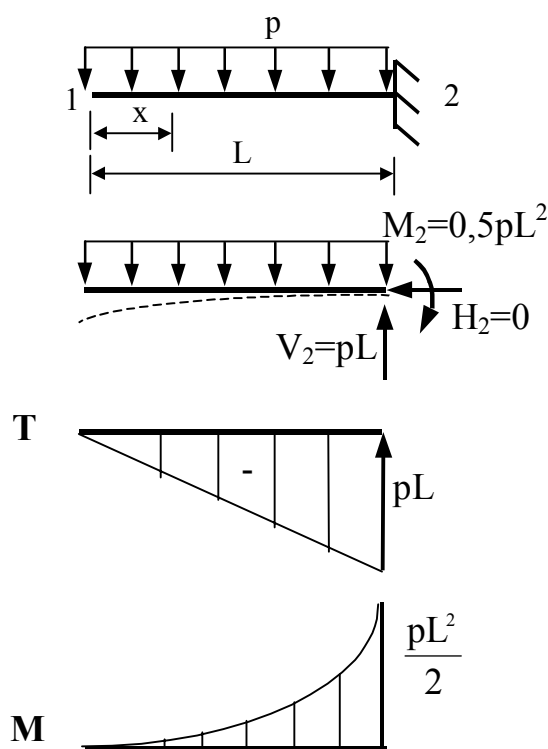
$$\sum Y_i = 0; \quad -P + V_2 = 0; \quad V_2 = P$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -P \cdot L + M_2 = 0; \quad M_2 = PL$$

Forța tăietoare. Axa barei este axa valorilor zero. În secțiunea 1 are loc un salt egal cu P și în sensul acestei forțe. În orice secțiune curentă, de abscisă x , forța tăietoare este egală cu P , deoarece este singura forță care se află la stânga secțiunii. În secțiunea 2 are loc un salt cu $V_2=P$ și diagrama se închide.

Momentul încovoietor. În secțiunea 1 momentul încovoietor este egal cu zero. Într-o secțiune curentă momentul încovoietor este $M_x = -P \cdot x$, ceea ce reprezintă o variație liniară. Pentru $x=0$ se obține $M_1=0$, iar pentru $x=L$ se obține $M_2 = -PL$. În secțiunea 2 are loc un salt cu momentul reacțiune $M_2=PL$ și diagrama se închide. Diagrama de moment încovoietor a fost reprezentată de partea fibrei întinse, care în acest caz este fibra superioară.

Problema 2.2 (fig.2.2)



- Fig.2.2 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_2 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -p \cdot L + V_2 = 0; \quad V_2 = pL$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -p \cdot L \cdot \frac{L}{2} + M_2 = 0; \quad M_2 = \frac{pL^2}{2}$$

Verificare

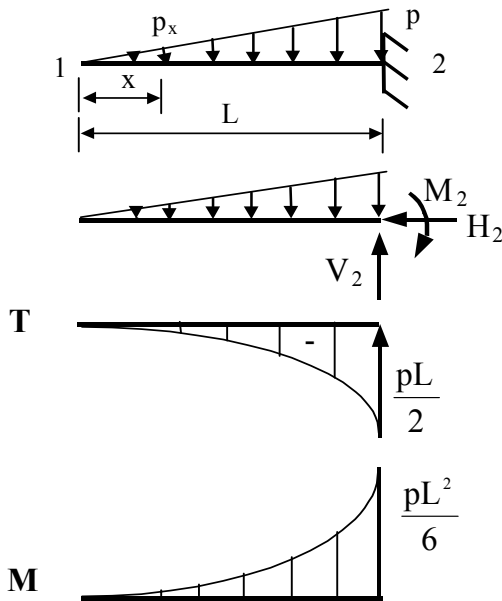
$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0; \quad M_2 - V_2 \cdot L + p \cdot L \cdot \frac{L}{2} &= \\ &= \frac{pL^2}{2} - pL^2 + \frac{pL^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

Forța tăietoare. În secțiunea curentă forța tăietoare are expresia $T_x = -p \cdot x$, deci variație liniară. Pentru $x=0$ $T_x=T_1=0$, iar pentru $x=L$ $T_x = T_2 = -pL$. În secțiunea 2 are loc un salt cu $V_2=pL$, prin care diagrama se închide.

Momentul încovoietor. În secțiunea curentă $M_x = -p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{px^2}{2}$, deci o curbă de gradul 2 (o parabolă). Pentru $x=0$, $M_x=M_1=0$, iar pentru $x=L$, momentul încovoietor

este $M_2 = -\frac{pL^2}{2}$. În extremitatea 2 a grinzii are loc un salt cu momentul reacțiune $M_2 = \frac{pL^2}{2}$ și diagrama se închide.

Problema 2.3 (fig.2.3)



- Fig.2.3 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_2 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -p \cdot \frac{L}{2} + V_2 = 0; \quad V_2 = \frac{pL}{2}$$

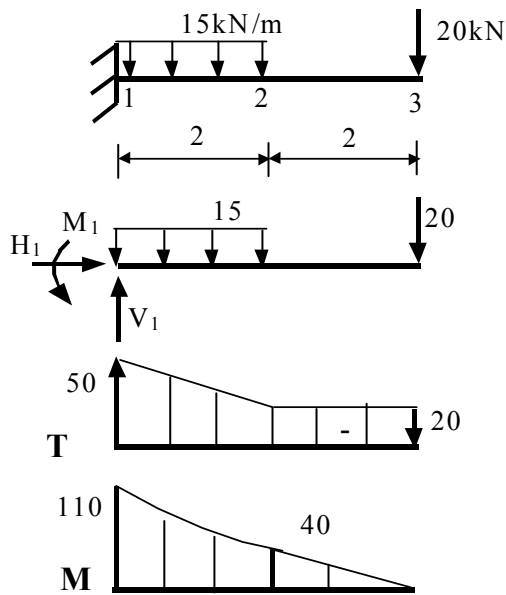
$$\sum M_2 = 0; \quad -\frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{3} + M_2 = 0; \quad M_2 = \frac{pL^2}{6}$$

Forța tăietoare. Intensitatea încărcării în secțiunea curentă este $p_x = p \frac{x}{L}$, iar forța tăietoare are expresia $T_x = -\frac{1}{2} p_x \cdot x = -\frac{1}{2} p \frac{x^2}{L}$. Rezultă o curbă de gradul doi cu tangenta zero în secțiunea 1 ($\frac{dT}{dx} = -p_x = 0$) și valoarea maximă în secțiunea 2, $T_2 = -\frac{pL}{2}$.

Momentul încovoietor. Momentul încovoietor în secțiunea curentă este $M_x = -\frac{1}{2} p_x \cdot x \cdot \frac{x}{3} = -\frac{1}{6} p \frac{x^3}{L}$. Pentru $x=0$, $M_x=0$ și pentru $x=L$, $M_x = M_2 = -\frac{pL^2}{6}$.

Tangenta la curbă este egală cu zero în secțiunea 1, deoarece $\frac{dM_x}{dx} = T_1 = 0$.

Problema 2.4 (fig.2.4)



- Fig.2.4 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 15 \cdot 2 - 20 = 0; \quad V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 15 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 4 = 0;$$

$$M_1 = 110 \text{ kNm}$$

Calculul eforturilor

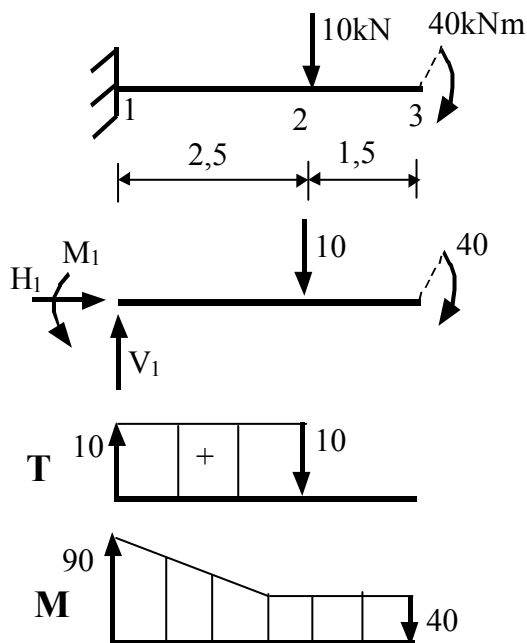
$$T_1 = V_1 = 50 \text{ kN};$$

$$T_3 = T_2 = 20 \text{ kN}$$

$$M_1 = -110 \text{ kNm};$$

$$M_2 = -110 + 50 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = -40 \text{ kNm}$$

Problema 2.5 (fig.2.5)



- Fig.2.5 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 10 = 0; \quad V_1 = 10 \text{ kN}$$

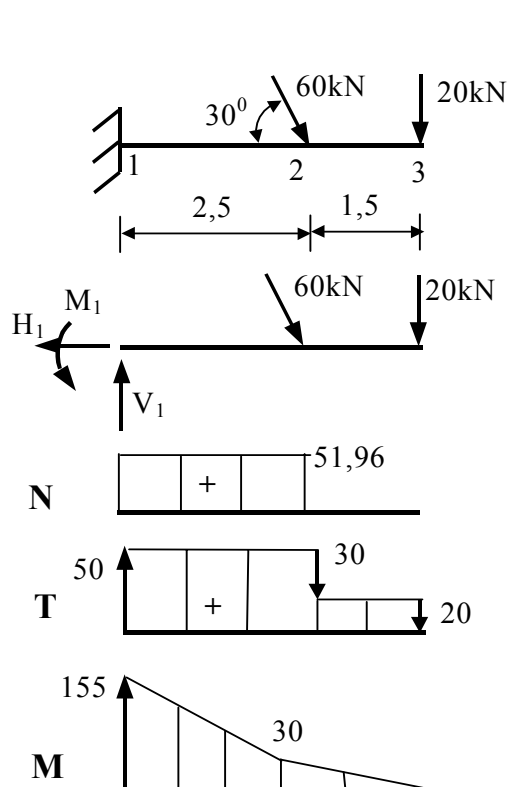
$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 10 \cdot 2,5 + 40 = 0;$$

$$M_1 = 90 \text{ kNm}$$

Forța tăietoare este constantă pe intervalul 1-2 și egală cu zero pe intervalul 2-3.

Momentul încovoiator variază liniar pe intervalul 1-2, de la valoarea $M_1 = -90 \text{ kNm}$ la valoarea $M_2 = -40 \text{ kNm}$. Pe intervalul 2-3 momentul încovoiator este constant, iar diagrama se încheie printr-un salt de 40 kNm.

Problema 2.6 (fig.2.6)



Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; -H_1 + 60 \cos 30^\circ = 0;$$

$$H_1 = 51,96 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0; V_1 - 60 \sin 30^\circ - 20 = 0;$$

$$V_1 = 50 \text{ kN}$$

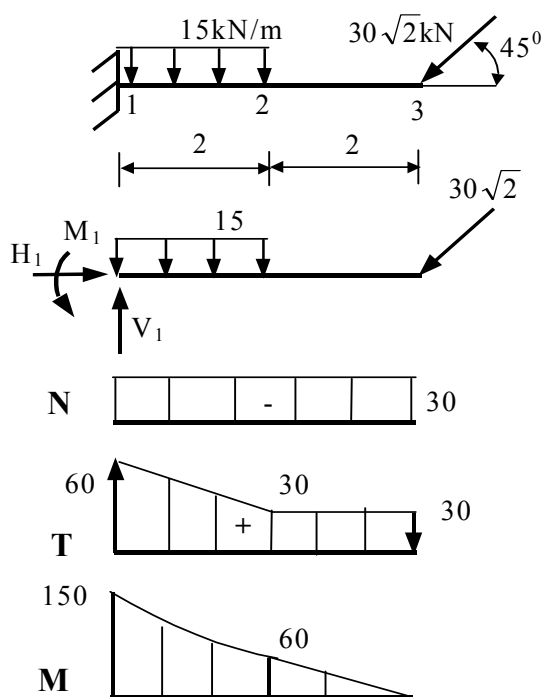
$$\sum M_1 = 0; -M_1 + 60 \sin 30^\circ \cdot 2,5 + 20 \cdot 4 = 0;$$

$$M_1 = 155 \text{ kNm}$$

$N_1 = H_1 = 51,96 \text{ kN}$ Forța axială este constantă pe intervalul 1-2 și este forță de întindere.

- Fig.2.6 -

Problema 2.7 (fig.2.7)



Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; H_1 - 30\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0;$$

$$H_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0; V_1 - 15 \cdot 2 - 30\sqrt{2} \sin 45^\circ = 0;$$

$$V_1 = 60 \text{ kN}$$

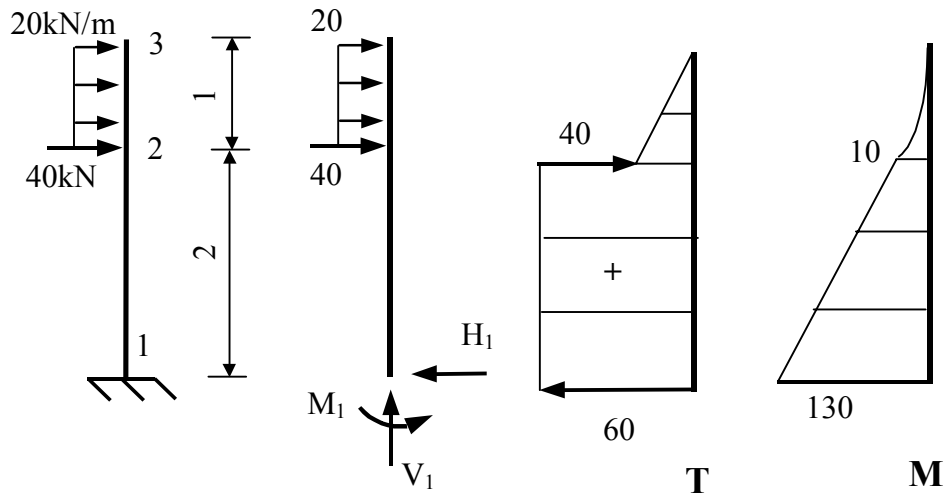
$$\sum M_1 = 0; -M_1 + 15 \cdot 2 \cdot 1 + 30\sqrt{2} \sin 45^\circ \cdot 4 = 0;$$

$$M_1 = 150 \text{ kNm}$$

-Fig.2.7 -

Problema 2.8 (fig.2.8)

- Fig.2.8 -

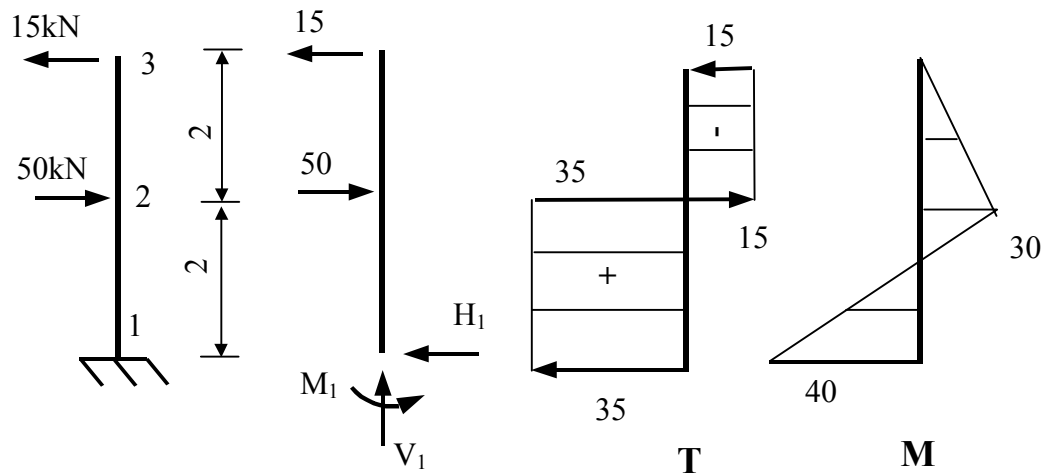


Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad -H_1 + 40 + 20 \cdot 1 = 0; \quad H_1 = 50\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; \quad V_1 = 0 \\ \sum M_i &= 0; \quad -M_1 + 40 \cdot 2 + 20 \cdot 1 \cdot 2,5 = 0; \quad M_1 = 130\text{kNm}\end{aligned}$$

Problema 2.9 (fig.2.9)

- Fig.2.9 -

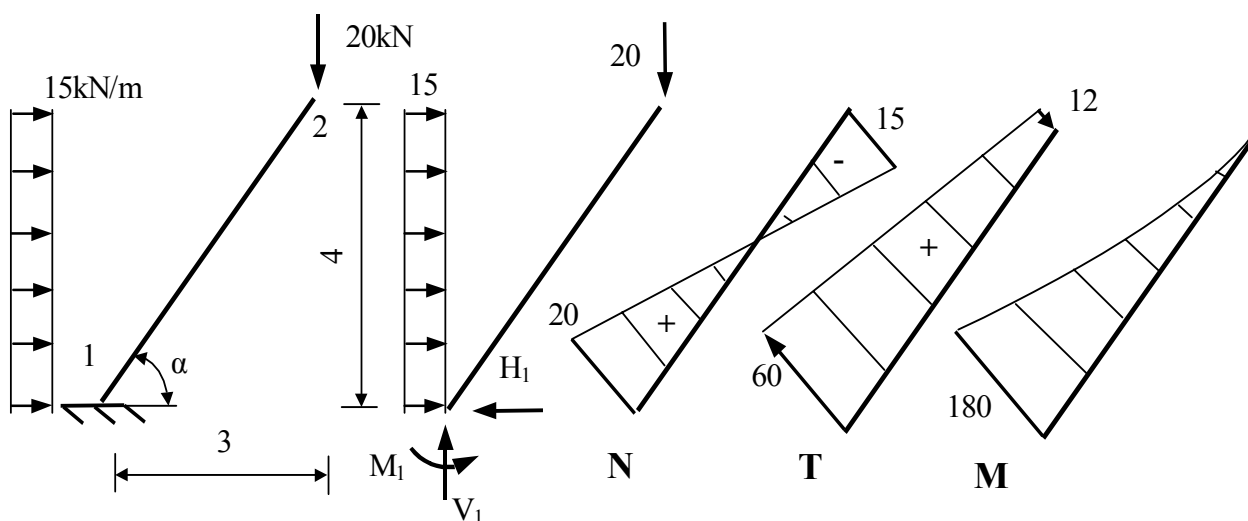


Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad -H_1 - 50 + 15 = 0; \quad H_1 = 35\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; \quad V_1 = 0 \\ \sum M_i &= 0; \quad -M_1 + 50 \cdot 2 - 15 \cdot 4 = 0; \quad M_1 = 40\text{kNm}\end{aligned}$$

Problema 2.10 (fig.2.10)

- Fig.2.10 -



Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad -H_1 + 15 \cdot 4 = 0; \quad H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 20 = 0; \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_i = 0; \quad -M_1 + 15 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 0; \quad M_1 = 180 \text{ kNm}$$

Calculul eforturilor

$$\sin \alpha = 0,8 \quad \cos \alpha = 0,6$$

$$N_1 = H_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha = 60 \cdot 0,6 - 20 \cdot 0,8 = 20 \text{ kN}$$

$$N_x = (H_1 - 15 \cdot x) \cos \alpha - V_1 \sin \alpha$$

$$x = 0; \quad N_x = N_1 = 20 \text{ kN}$$

$$x = 4; \quad N_x = N_2 = -20 \sin \alpha = -16 \text{ kN}$$

$$T_1 = H_1 \sin \alpha + V_1 \cos \alpha = 60 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,6 = 60 \text{ kN}$$

$$T_x = (H_1 - 15 \cdot x) \sin \alpha + V_1 \cos \alpha$$

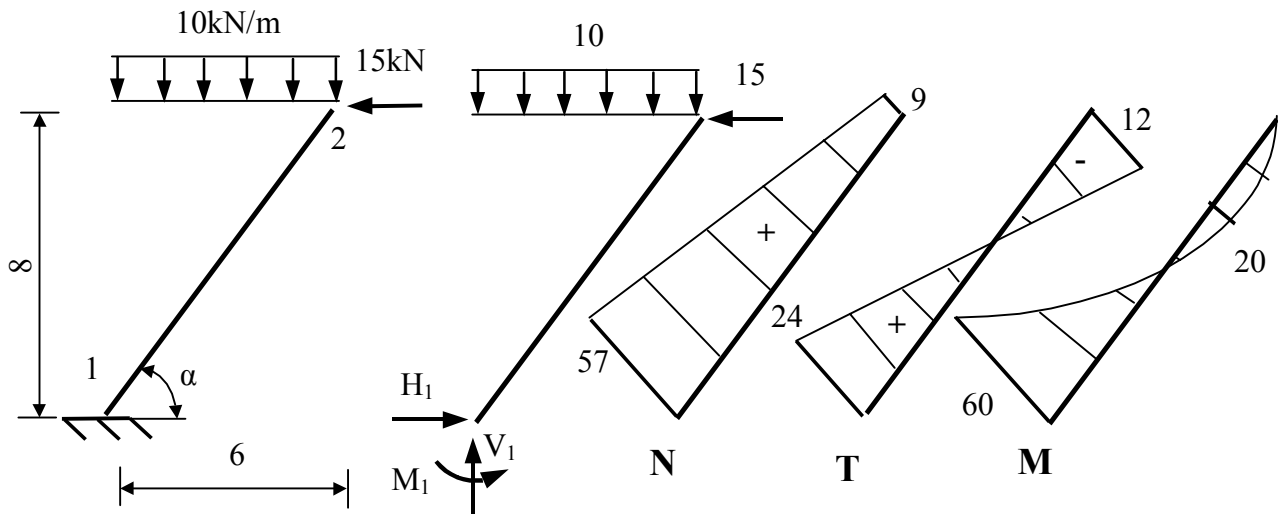
$$x = 0; \quad T_x = T_1 = 60 \text{ kN}$$

$$x = 4; \quad T_x = T_2 = V_1 \cos \alpha = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ kN}$$

$$M_x = -180 + H_1 \cdot x + V_1 \cdot x \frac{1}{\tan \alpha} - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad \text{Variație parabolică cu tangenta}$$

diferită de zero în capătul 2 al consolei.

Problema 2.11 (fig.2.11)



- Fig.2.11 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad -H_1 + 15 = 0; \quad H_1 = 15\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; \quad V_1 - 10 \cdot 6 = 0; \quad V_1 = 60\text{kN} \\ \sum M_i &= 0; \quad -M_1 + 10 \cdot 6 \cdot 3 - 15 \cdot 8 = 0; \quad M_1 = 60\text{kNm}\end{aligned}$$

Calculul eforturilor

$$\sin \alpha = 0,8 \quad \cos \alpha = 0,6$$

$$N_1 = -H_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha = -15 \cdot 0,6 - 60 \cdot 0,8 = -57\text{kN}$$

$$N_x = H_1 \cos \alpha - (V_1 - 10 \cdot x) \sin \alpha$$

$$x = 0; \quad N_x = N_1 = -57\text{kN}$$

$$x = 6; \quad N_x = N_2 = -15 \cos \alpha = -9\text{kN}$$

$$T_1 = V_1 \cos \alpha - H_1 \sin \alpha = 60 \cdot 0,6 - 15 \cdot 0,8 = 24\text{kN}$$

$$T_x = (V_1 - 10 \cdot x) \cos \alpha - H_1 \sin \alpha$$

$$x = 0; \quad T_x = T_1 = 24\text{kN}$$

$$x = 6; \quad T_x = T_2 = -H_1 \sin \alpha = -12\text{kN}$$

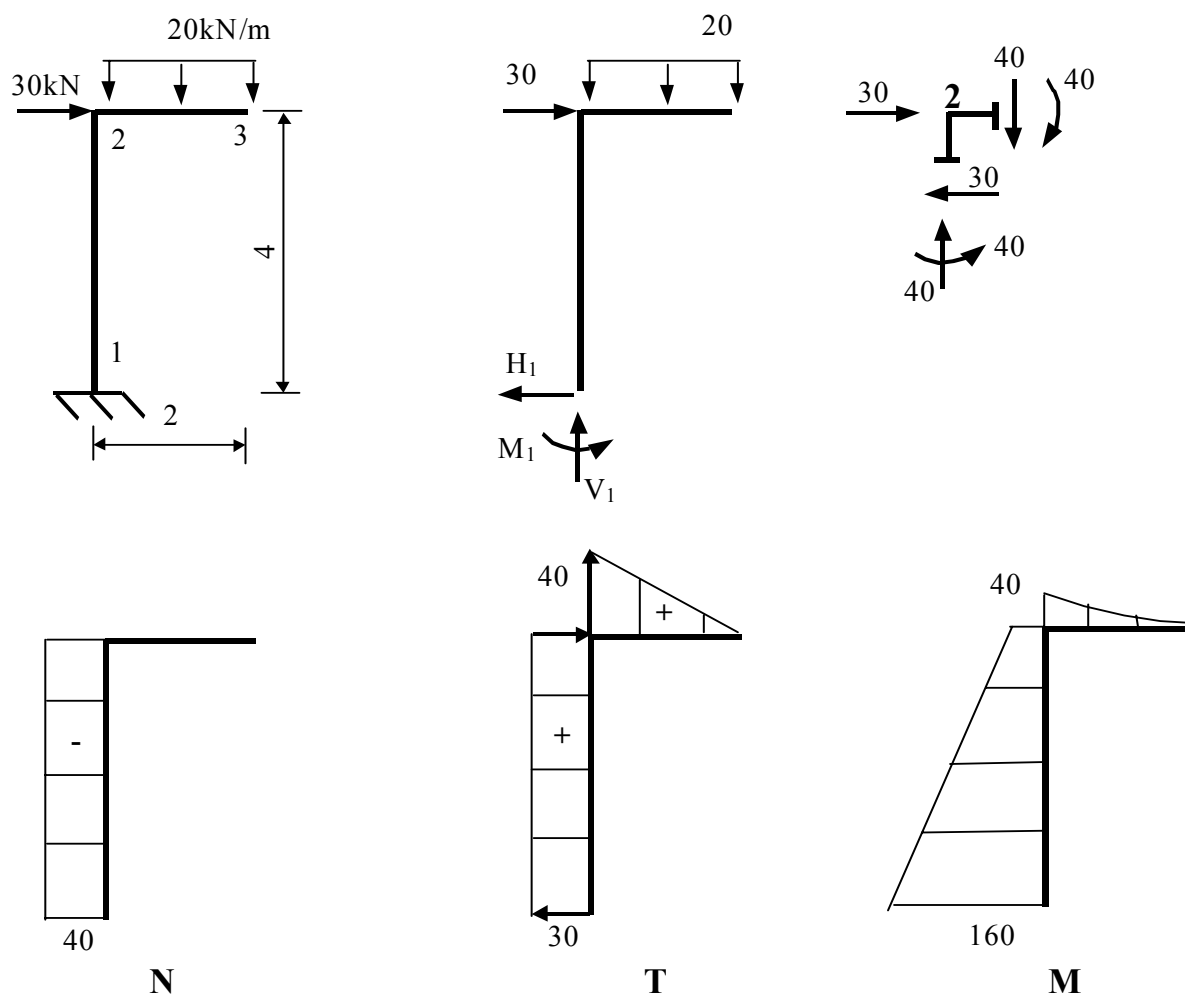
$$M_x = -M_1 + V_1 \cdot x - H_1 \cdot x \cdot \tan \alpha - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad \text{Variație parabolică cu un maxim în}$$

secțiunea în care se anulează forța tăietoare

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = V_1 - H_1 \cdot \tan \alpha - 10 \cdot x = 0; \quad x = 4\text{m}$$

$$M_{\max} = -M_1 + V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot 4 \cdot \tan \alpha - 10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 20\text{kNm}$$

Problema 2.12 (fig.2.12)



- Fig.2.12 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - 30 = 0; \quad H_1 = 30 \text{ kN}$$

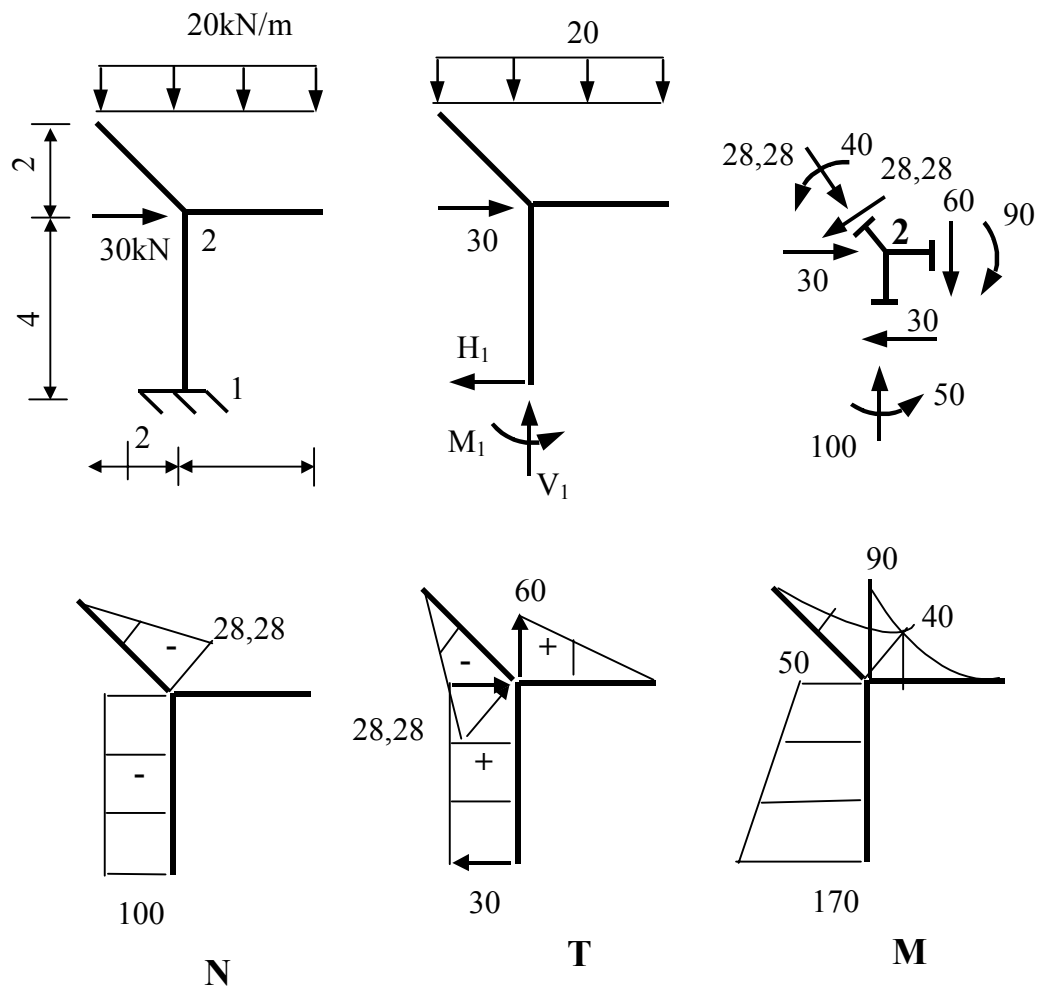
$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 20 \cdot 2 = 0; \quad V_1 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_i = 0; \quad -M_1 + 30 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad M_1 = 160 \text{ kNm}$$

Corectitudinea calculelor se certifică prin verificarea echilibrului nodului 2, format din stâlpul vertical și consola orizontală.

Trebuie îndeplinite condițiile $\sum X_i = 0$, $\sum Y_i = 0$, $\sum M_2 = 0$.

Problema 2.13(fig.2.13)

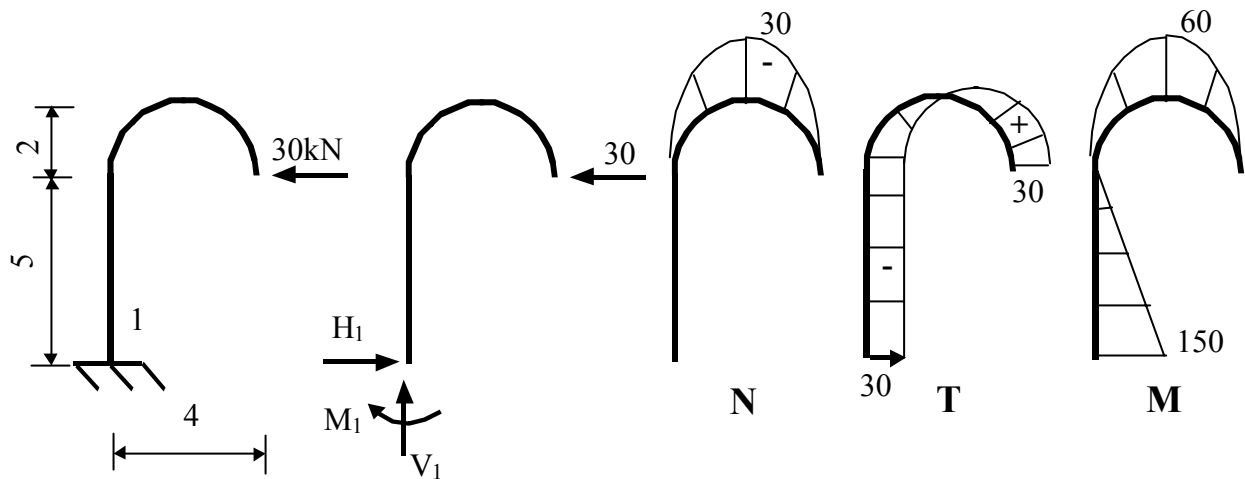


- Fig.2.13 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & -H_1 + 30 &= 0; & H_1 &= 30\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; & V_1 - 20 \cdot 5 &= 0; & V_1 &= 10\text{kN} \\ \sum M_i &= 0; & -M_1 + 30 \cdot 4 + 20 \cdot 5 \cdot 0,5 &= 0; & M_1 &= 170\text{kNm} \end{aligned}$$

Problema 2.14 (fig.2.14)

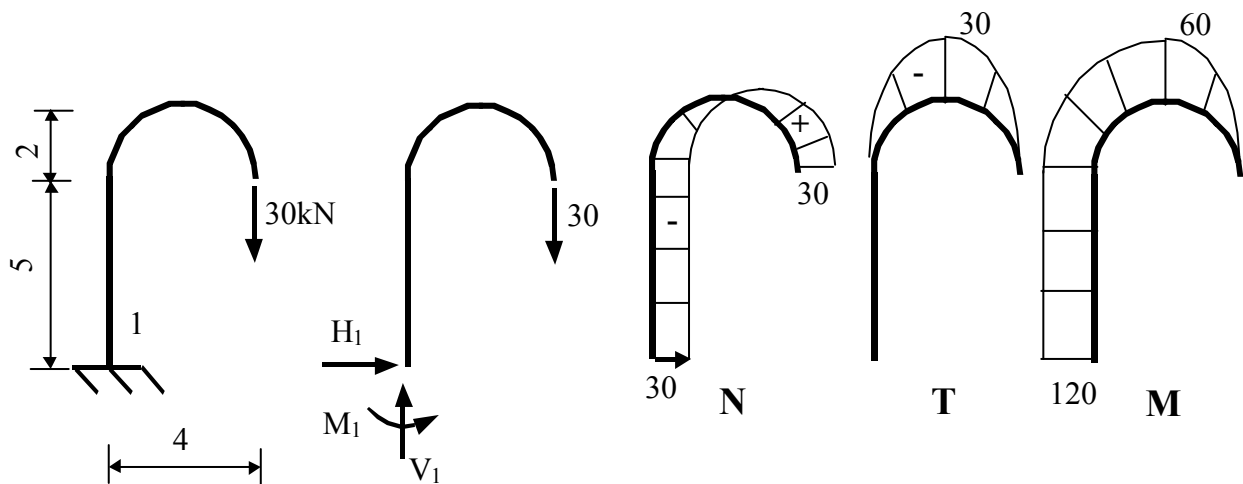


- Fig.2.14 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 - 30 &= 0; & H_1 &= 30\text{kN} \\ \sum Y_i &= 0; & V_1 &= 0 \\ \sum M_i &= 0; & M_1 - 30 \cdot 5 &= 0; & M_1 &= 150\text{kNm}\end{aligned}$$

Problema 2.15 (fig.2.15)

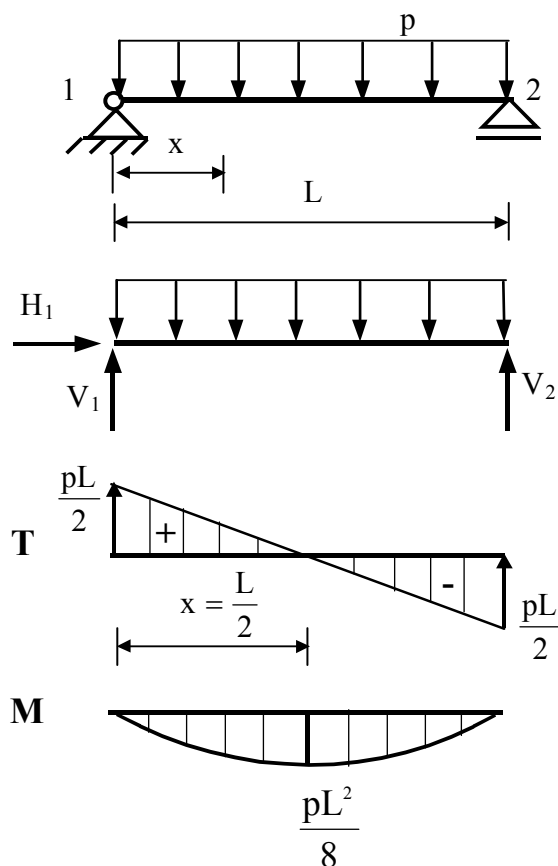


- Fig.2.15 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & V_1 - 30 &= 0; & V_1 &= 30\text{kN} \\ \sum M_i &= 0; & -M_1 + 30 \cdot 4 &= 0; & M_1 &= 120\text{kNm}\end{aligned}$$

Problema 2.16 (fig.2.16)



Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot L - pL \cdot \frac{L}{2} = 0;$$

$$V_1 = \frac{pL}{2}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad pL \cdot \frac{L}{2} - V_2 \cdot L = 0;$$

$$V_2 = \frac{pL}{2}$$

- Fig.2.16 -

Forța tăietoare în secțiunea curentă este $T_x = \frac{pL}{2} - p \cdot x$, deci variație liniară.

Pentru $x=0$, $T_x = T_1 = \frac{pL}{2}$

$$x = \frac{L}{2}, \quad T_x = 0$$

$$x = L, \quad T_x = T_2 = -\frac{pL}{2}$$

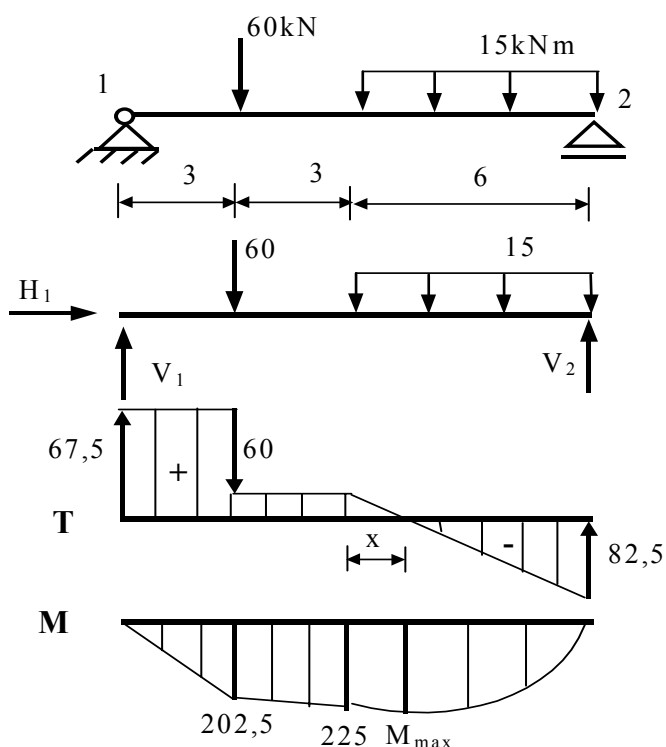
Momentul încovoietor în secțiunea curentă are expresia

$$M_x = \frac{pL}{2} \cdot x - px \cdot \frac{x}{2}$$

deci variație parabolică.

Pentru $x=0$ și $x=L$, $M_x=0$, iar pentru $x = \frac{L}{2}$, $M_x = M_{\max} = \frac{pL^2}{8}$.

Problema 2.17 (fig.2.17)



- Fig.2.17 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0;$$

$$V_1 \cdot 12 - 60 \cdot 9 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$V_1 = 67,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0;$$

$$60 \cdot 3 + 15 \cdot 6 \cdot 9 - V_2 \cdot 12 = 0;$$

$$V_2 = 82,5 \text{ kN}$$

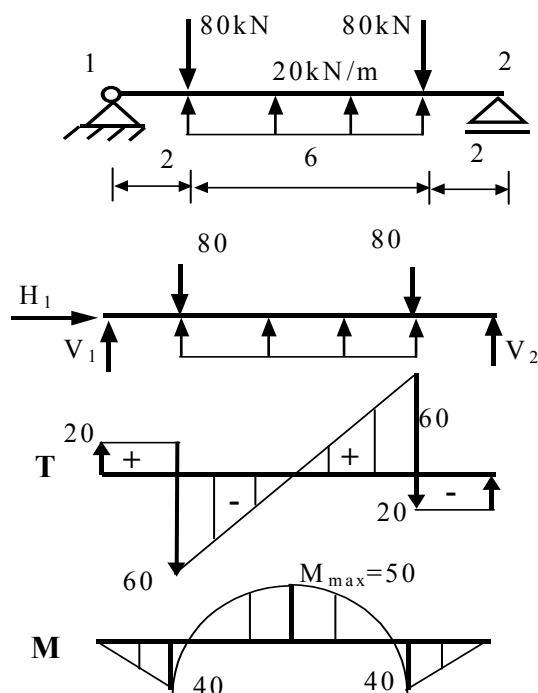
$$T_x = 67,5 - 60 - 15 \cdot x = 0;$$

$$x = 0,5 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 67,5 \cdot 6,5 - 60 \cdot 3,5 -$$

$$- 15 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = 226,875 \text{ kNm}$$

Problema 2.18 (fig.2.18)



- Fig.2.18 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0;$$

$$V_1 \cdot 10 - 80 \cdot 8 + 20 \cdot 6 \cdot 5 - 80 \cdot 2 = 0;$$

$$V_1 = 20 \text{ kN}$$

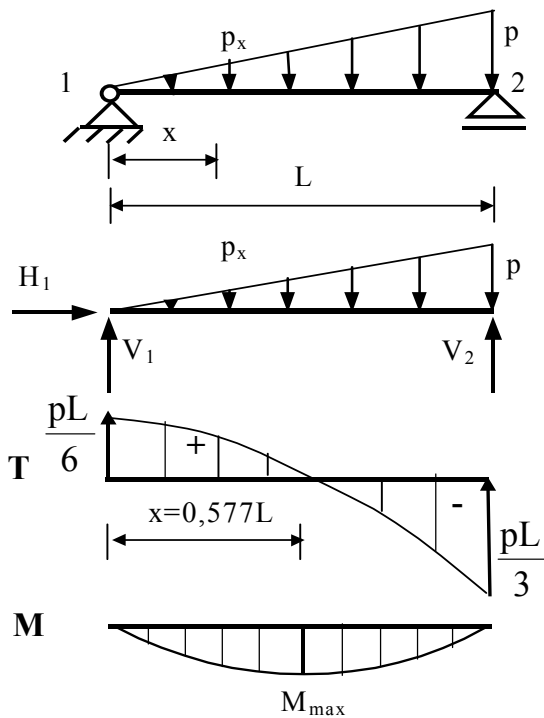
$$\sum M_1 = 0;$$

$$80 \cdot 2 - 20 \cdot 6 \cdot 5 + 80 \cdot 2 - V_2 \cdot 10 = 0;$$

$$V_2 = 20 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = 20 \cdot 5 - 80 \cdot 3 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = -50 \text{ kNm}$$

Problema 2.19 (fig.2.19)



Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot L - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0;$$

$$V_1 = \frac{pL}{6}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad \frac{pL}{2} \cdot \frac{2L}{3} - V_2 \cdot L = 0;$$

$$V_2 = \frac{pL}{3}$$

- Fig.2.19 -

$$p_x = p \cdot \frac{x}{L}$$

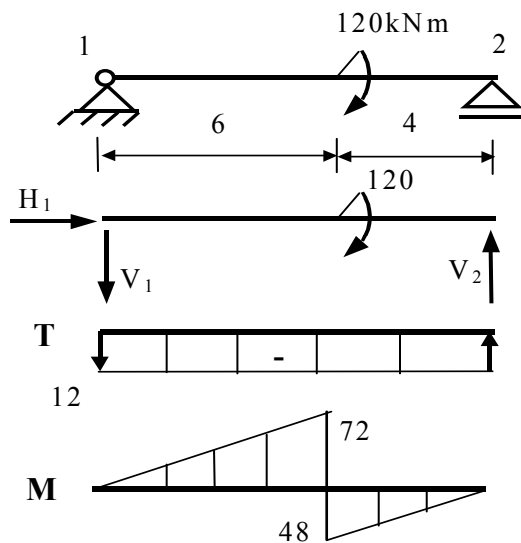
$$T_x = \frac{pL}{6} - \frac{1}{2} \cdot p_x \cdot x = \frac{pL}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{px^2}{L} \quad (\text{curbă de gradul 2})$$

$$T_x = 0; \quad x = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$$

$$M_x = \frac{pL}{6} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot p_x \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{pL}{6} \cdot x - \frac{L}{6} \cdot p \frac{x^3}{L}$$

$$\text{pentru } x = \frac{L}{\sqrt{3}} \text{ rezultă } M_{\max} = 0,064pL^2$$

Problema 2.20 (fig.2.20)



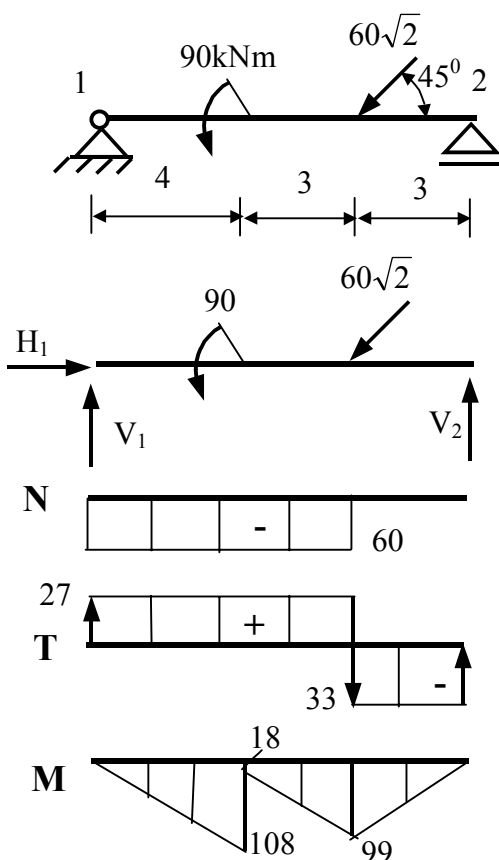
- Fig.2.20 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 &= 0 \\ \sum M_2 &= 0; & -V_1 \cdot 10 + 120 &= 0; \\ & & V_1 &= 12\text{kN} \\ \sum M_1 &= 0; & 120 - V_2 \cdot 10 &= 0; \\ & & V_2 &= 12\text{kN}\end{aligned}$$

În secțiunea în care este aplicat momentul concentrat are loc un salt, în diagrama de moment încovoietor. Cele două ramuri ale diagramei M sunt paralele, deoarece forța tăietoare este constantă.

Problema 2.21 (fig.2.21)

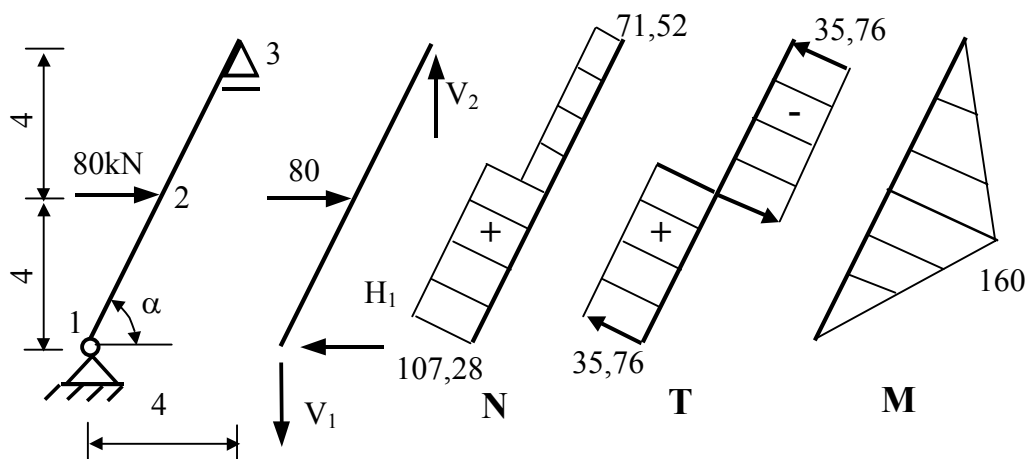


-Fig.2.21 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 - 60 \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ & & H_1 &= 60\text{kN} \\ \sum M_2 &= 0; & V_1 \cdot 10 - 90 - 60\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 &= 0; \\ & & V_1 &= 27\text{kN} \\ \sum M_1 &= 0; & -90 + 60\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 7 - V_2 \cdot 10 &= 0; \\ & & V_2 &= 33\text{kN}\end{aligned}$$

Problema 2.22 (fig.2.22)



-Fig.2.22 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad 80 - H_1 = 0; \quad H_1 = 80\text{kN} \\ \sum M_2 &= 0; \quad 80 \cdot 8 - V_1 \cdot 4 - 80 \cdot 4 = 0; \quad V_1 = 80\text{kN} \\ \sum M_1 &= 0; \quad 80 \cdot 4 - V_2 \cdot 4 = 0; \quad V_2 = 80\text{kN}\end{aligned}$$

Calculul eforturilor

$$\cos\alpha = 0,447$$

$$\sin\alpha = 0,894$$

$$N_{12} = H_1 \cdot \cos\alpha + V_1 \cdot \sin\alpha = 107,28\text{kN}$$

$$N_{23} = N_{12} - 80 \cdot \cos\alpha = 71,52\text{kN} \quad \text{sau} \quad N_{23} = V_2 \cdot \sin\alpha = 71,52\text{kN}$$

$$T_{12} = H_1 \cdot \sin\alpha - V_1 \cdot \cos\alpha = 35,76\text{kN}$$

$$T_{23} = T_{12} - 80 \cdot \sin\alpha = -35,76\text{kN} \quad \text{sau} \quad T_{23} = -V_2 \cdot \cos\alpha = -35,76\text{kN}$$

$$M_2 = H_1 \cdot 4 - V_1 \cdot 2 = 160\text{kNm} \quad \text{sau} \quad M_2 = V_2 \cdot 2 = 160\text{kNm}$$

Problema 2.23 (fig.2.23)

Calculul reacțiunilor

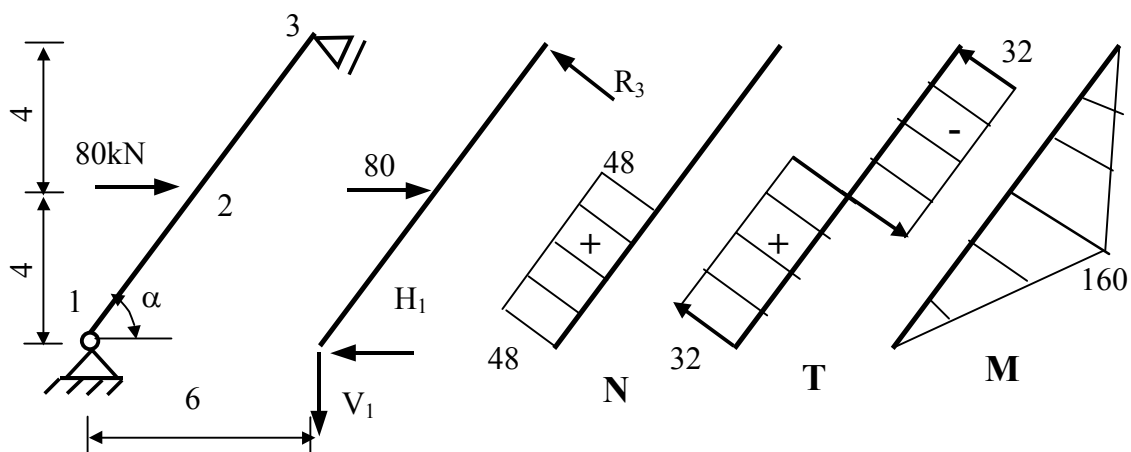
$$\sin\alpha = 0,8$$

$$\cos\alpha = 0,6$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 80 \cdot 4 - R_3 \cdot 10 = 0; \quad R_3 = 32\text{kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad -H_1 + 80 - R_3 \cdot \sin\alpha = 0; \quad H_1 = 54,4\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 54,4 \cdot 8 - V_1 \cdot 6 - 80 \cdot 4 = 0; \quad V_1 = 19,2\text{kN}$$



- Fig.2.23 -

Calculul eforturilor

$$N_{12} = H_1 \cdot \cos \alpha + V_1 \cdot \sin \alpha = 48 \text{ kN}$$

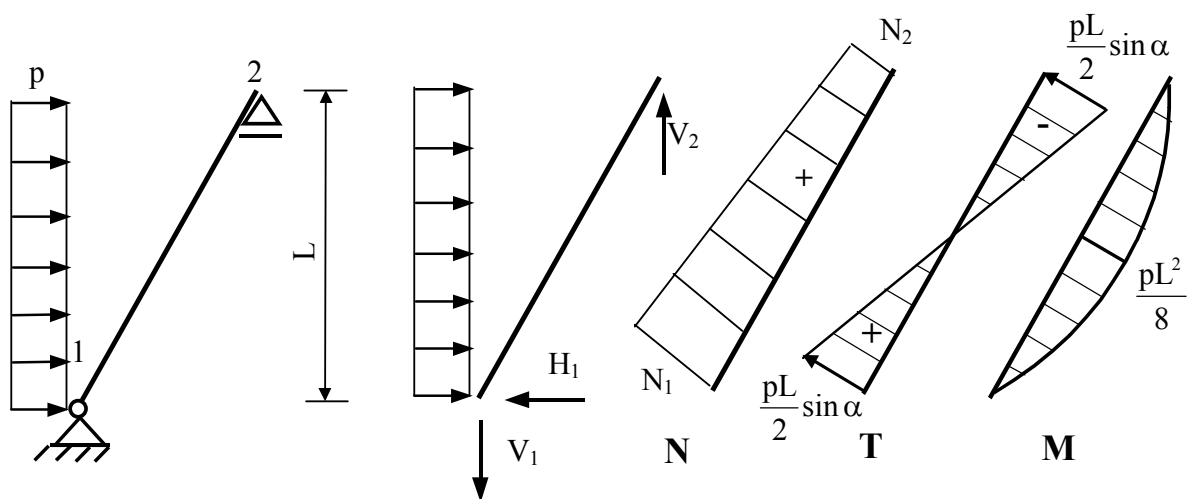
$$N_{23} = N_{12} - 80 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_{12} = H_1 \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot \cos \alpha = 32 \text{ kN}$$

$$T_{23} = T_{12} - 80 \cdot \sin \alpha = -32 \text{ kN}$$

$$M_2 = R_3 \cdot 5 = 160 \text{ kNm}$$

Problema 2.24 (fig.2.24)



- Fig.2.24 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - pL = 0; \quad H_1 = pL$$

$$\sum M_1 = 0; \quad pL \cdot \frac{L}{2} - V_2 \cdot \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha} = 0; \quad V_2 = \frac{pL}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sum M_2 = 0; \quad H_1 \cdot L - V_1 \cdot \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha} - pL \cdot \frac{L}{2} = 0; \quad V_1 = \frac{pL}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad -V_1 + V_2 = -\frac{pL}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{pL}{2} \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Calculul eforturilor

$$N_1 = H_1 \cdot \cos \alpha + V_1 \cdot \sin \alpha = \frac{pL}{2 \cos \alpha} (1 + \cos^2 \alpha)$$

$$N_2 = V_2 \cdot \sin \alpha = \frac{pL}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

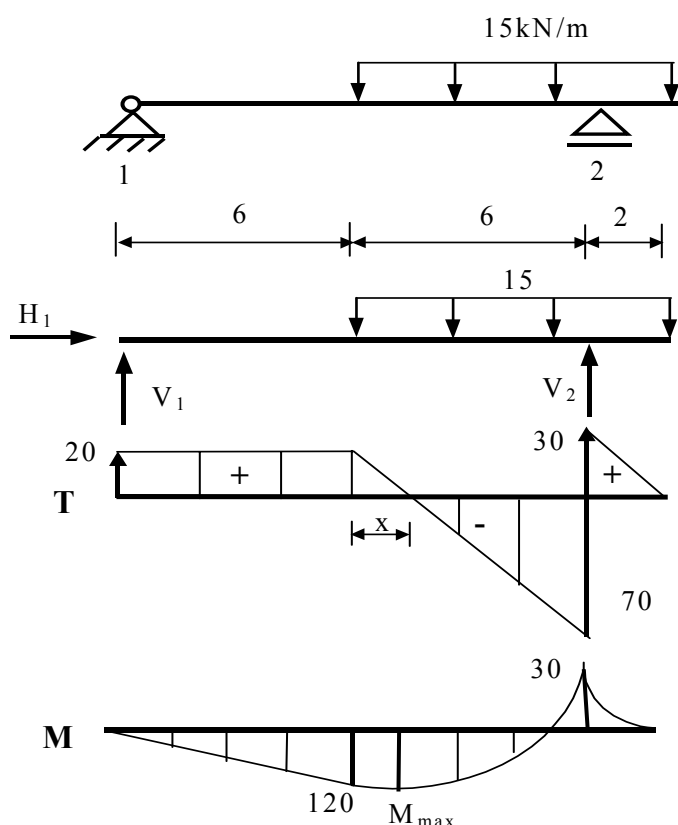
$$T_1 = H_1 \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot \cos \alpha = \frac{pL}{2} \sin \alpha$$

$$T_2 = -V_2 \cdot \cos \alpha = -\frac{pL}{2} \sin \alpha$$

Forța tăietoare se anulează la mijlocul deschiderii, iar momentul încovoietor maxim este:

$$M_{\max} = H_1 \cdot \frac{L}{2} - V_1 \cdot \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{pL^2}{8}$$

Problema 2.25 (fig.2.25)



Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 &= 0 \\ \sum M_2 &= 0; & V_1 \cdot 12 - 15 \cdot 8 \cdot 2 &= 0; \\ & & V_1 &= 20 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & 15 \cdot 8 \cdot 10 - V_2 \cdot 12 &= 0; \\ & & V_2 &= 100 \text{ kN}\end{aligned}$$

Verificare

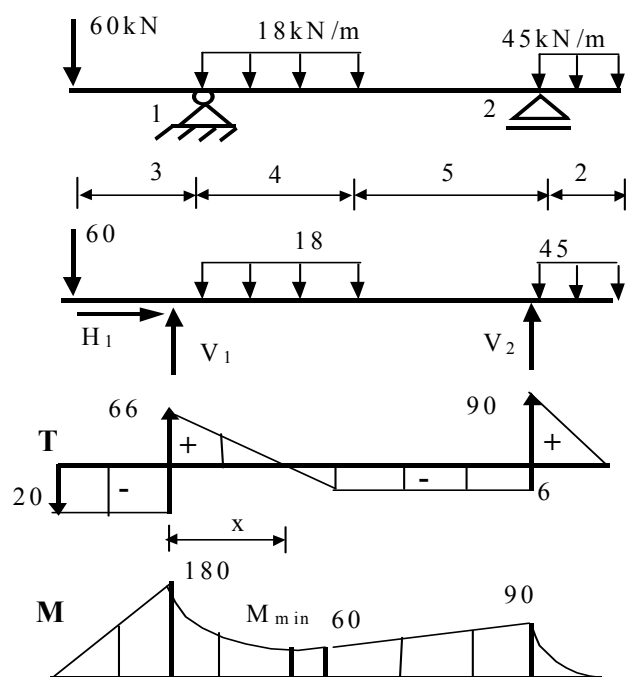
$$\sum Y_i = 0; \quad 20 - 15 \cdot 8 + 100 = 0$$

$$T_x = 20 - 15 \cdot x = 0; \quad x = 1,33 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}M_{\max} &= 20(6 + x) - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \\ &= 133,33 \text{ kNm}\end{aligned}$$

-Fig.2.25

Problema 2.26 (fig.2.26)



Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & H_1 &= 0 \\ \sum M_2 &= 0; & -60 \cdot 12 + V_1 \cdot 9 - \\ & & -18 \cdot 4 \cdot 7 + 45 \cdot 2 \cdot 1 &= 0; \\ & & V_1 &= 126 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & -60 \cdot 3 + 18 \cdot 4 \cdot 2 - \\ & & -V_2 \cdot 9 + 45 \cdot 2 \cdot 10 &= 0; \\ & & V_2 &= 96 \text{ kN}\end{aligned}$$

Verificare

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0; \\ -60 + 126 - 18 \cdot 4 + 96 - 90 &= 0\end{aligned}$$

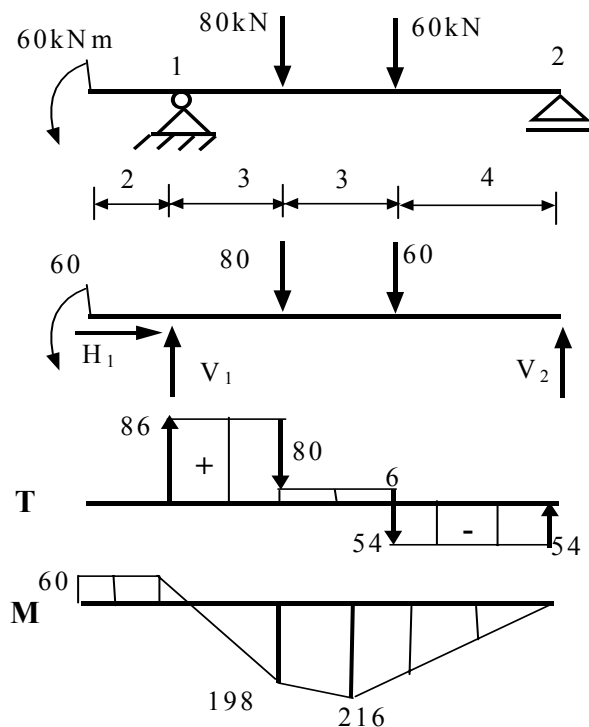
Calculul eforturilor

$$T_x = -60 + 126 - 18 \cdot x = 0; \quad x = 3,67 \text{ m}$$

- Fig.2.26 -

$$M_{\min} = -60(3 + x) - 126 \cdot x - 18 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -58,96 \text{ kNm}$$

Problema 2.27 (fig.2.27)



- Fig.2.27 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0;$$

$$-60 + 80 \cdot 3 + 60 \cdot 6 - V_2 \cdot 10 = 0$$

$$V_2 = 54 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0;$$

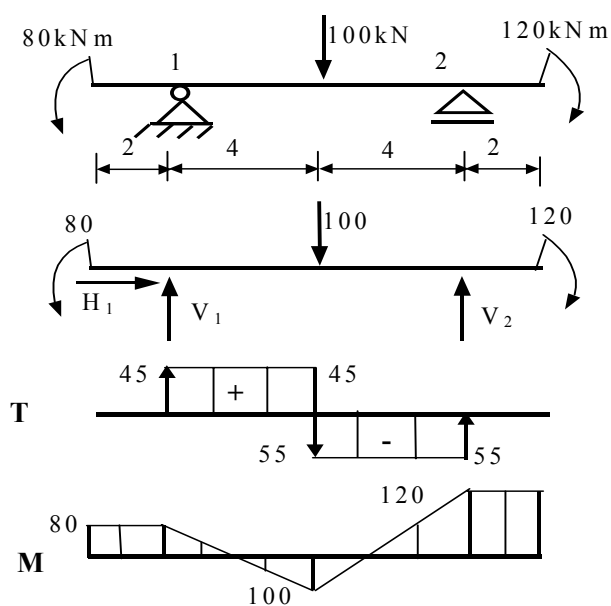
$$-60 + V_1 \cdot 10 - 80 \cdot 7 - 60 \cdot 4 = 0$$

$$V_1 = 86 \text{ kN}$$

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad 54 - 80 - 60 + 86 = 0$$

Problema 2.28 (fig.2.28)



- Fig.2.28 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0;$$

$$-80 + 100 \cdot 4 - V_2 \cdot 8 + 120 = 0$$

$$V_2 = 55 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0;$$

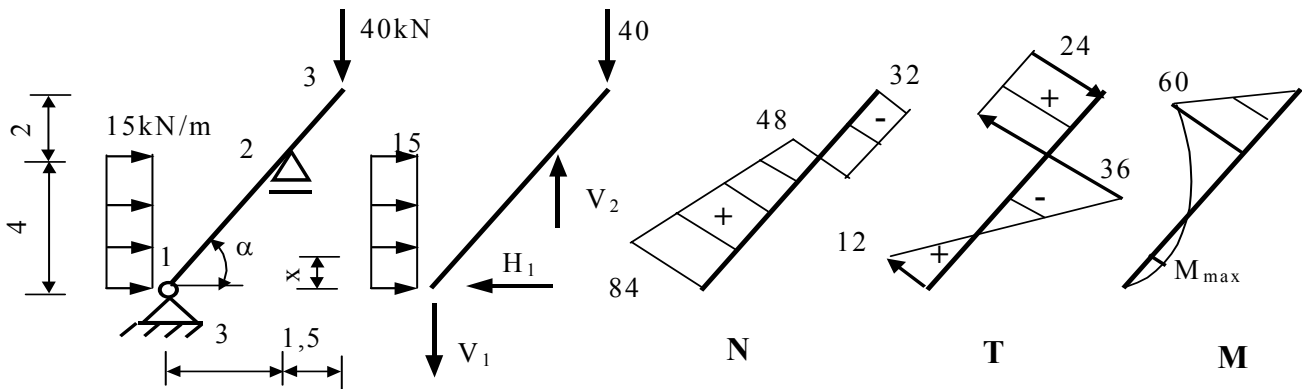
$$-80 + V_1 \cdot 8 - 100 \cdot 4 + 120 = 0$$

$$V_1 = 45 \text{ kN}$$

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad 45 - 100 + 55 = 0$$

Problema 2.29 (fig.2.29)



- Fig.2.29 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad 15 \cdot 4 - H_1 = 0; \quad H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 15 \cdot 4 \cdot 2 - V_2 \cdot 3 + 40 \cdot 4,5 = 0; \quad V_2 = 100 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 3 - 15 \cdot 4 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 40 \cdot 1,5 = 0 \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad -60 + 100 - 40 = 0$$

Calculul eforturilor

$$N_1 = H_1 \cdot \cos \alpha + V_1 \cdot \sin \alpha = 84 \text{ kN}$$

$$N_2^{\text{st}} = N_1 - 15 \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 48 \text{ kN}$$

$$N_2^{\text{dr}} = N_2^{\text{st}} - V_2 \cdot \sin \alpha = -32 \text{ kN}$$

$$N_3 = -40 \cdot \sin \alpha = -32 \text{ kN}$$

$$T_1 = H_1 \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot \cos \alpha = 12 \text{ kN}$$

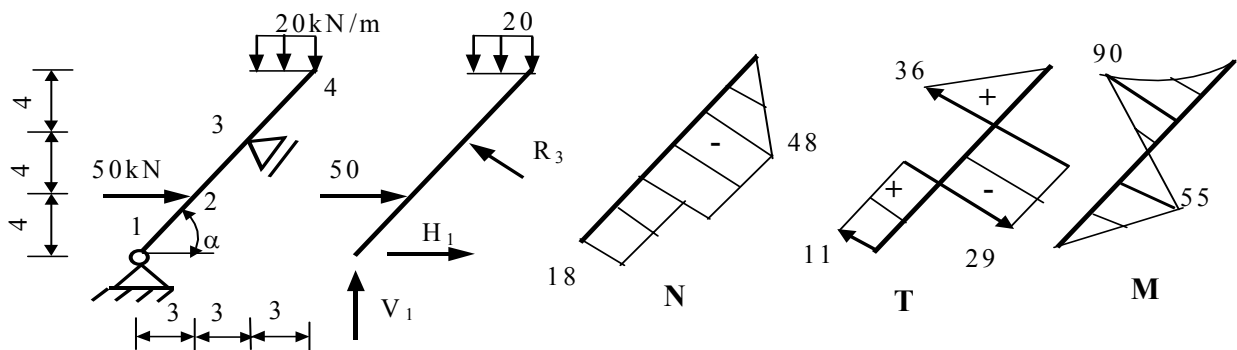
$$T_2^{\text{st}} = T_1 - 15 \cdot 4 \cdot \sin \alpha = -36 \text{ kN}$$

$$T_2^{\text{dr}} = T_2^{\text{st}} + V_2 \cdot \cos \alpha = 24 \text{ kN}$$

$$T_x = (H_1 - 15 \cdot x) \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad x = 1$$

$$M_{\text{max}} = H_1 \cdot x - V_1 \cdot \frac{x}{\tan \alpha} - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 11,25 \text{ kNm}$$

Problema 2.30 (fig.2.30)



- Fig.2.30 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_1 = 0; \quad 50 \cdot 4 - R_3 \cdot 10 + 20 \cdot 3 \cdot 7,5 = 0; \quad R_3 = 65 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad 50 + H_1 - R_3 \cdot \sin \alpha = 0; \quad H_1 = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -2 \cdot 8 + V_1 \cdot 6 - 50 \cdot 4 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \quad V_1 = 21 \text{ kN}$$

Verificare

$$\sum Y_i = 0; \quad 21 + 65 \cdot \cos \alpha - 20 \cdot 3 = 21 + 39 - 60 = 0$$

Calculul eforturilor

$$N_1 = -H_1 \cdot \cos \alpha - V_1 \cdot \sin \alpha = -18 \text{ kN}$$

$$N_2^{\text{dr}} = N_1 - 50 \cdot \cos \alpha = -48 \text{ kN} \quad N_3^{\text{dr}} = N_2^{\text{dr}} = -48 \text{ kN}$$

$$T_1 = -H_1 \cdot \sin \alpha + V_1 \cdot \cos \alpha = 11 \text{ kN}$$

$$T_2^{\text{dr}} = T_1 - 50 \cdot \sin \alpha = -29 \text{ kN} \quad T_3^{\text{dr}} = T_2^{\text{dr}} + R_3 = 36 \text{ kN}$$

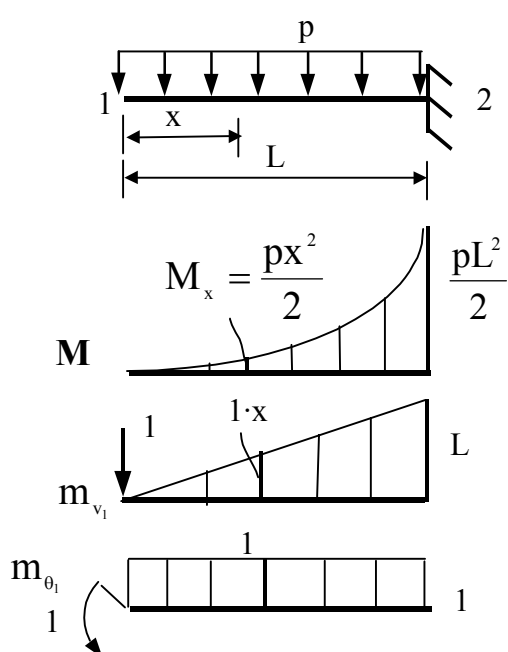
$$M_2 = V_1 \cdot 3 - H_1 \cdot 4 = 55 \text{ kNm}$$

$$M_3 = V_1 \cdot 6 - H_1 \cdot 8 - 50 \cdot 4 = -90 \text{ kNm} \quad \text{sau} \quad M_3 = -20 \cdot 3 \cdot 1,5 = -90 \text{ kNm}$$

B. CALCULUL DEPLASĂRIILOR

Să se calculeze deplasările indicate la grinzile simple următoare:

Problema 2.31 (fig.2.31) Se cer translația pe verticală v_1 și rotirea θ_1 . Se cunosc modulul de elasticitate E și momentul de inerție I .



- Fig.2.31 -

Expresia deplasării pentru elementele solicate la încovoiere este

$$\Delta_i = \int \frac{m_i \cdot M}{EI} dx$$

Diagrama de moment încovoietor produsă de forțele reale se determină, deoarece este necesară în calculul de rezistență la dimensionarea sau verificarea secțiunii transversale.

Diagrama unitară m_i se obține încărcând grinda cu o forță sau un moment egal cu unitatea, în funcție de deplasarea ce urmează a fi determinată – translație sau rotire.

Calculul translației v_1

1. Calculul utilizând integrarea directă

Momentul încovoietor în secțiunea curentă:

- în diagrama M este $M_x = \frac{px^2}{2}$

- în diagrama m_i este $m_x = 1 \cdot x$

$$v_1 = \int_0^L \frac{m_{v_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x \cdot \frac{px^2}{2} dx = \frac{pL^4}{8EI}$$

Semnul deplasării este plus deoarece ambele diagrame se află pe aceeași parte a axei barei. De asemenea, trebuie precizat faptul că semnul rezultatului fiind plus deplasarea reală se produce în sensul forței egale cu unitatea.

2. Calculul utilizând regula de integrare Vereșciaghin

$$v_1 = \int_0^L \frac{m_{v_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \frac{pL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{3}{4} L = \frac{pL^4}{8EI}$$

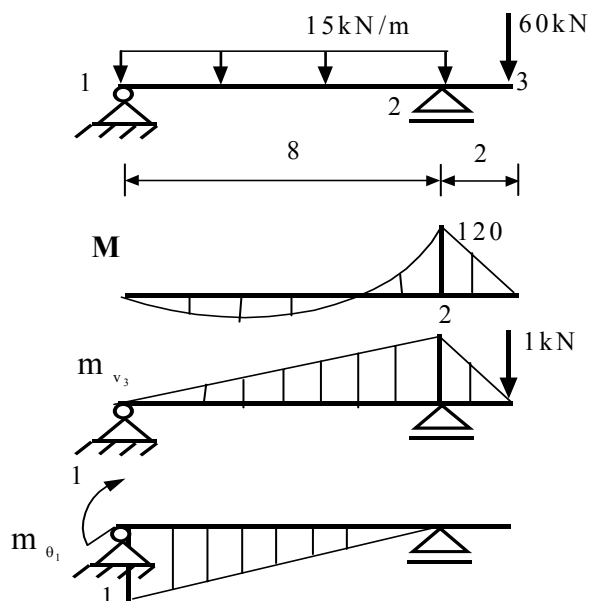
Calculul rotirii θ_1

Momentul încovoietor în secțiunea curentă din diagrama m_{θ_1} este $m_x = 1$.

$$\theta_1 = \int_0^L \frac{m_{\theta_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L 1 \cdot \frac{px^2}{2} dx = \frac{pL^3}{6EI} \text{ (integrare directă)}$$

$$\theta_1 = \int_0^L \frac{m_{\theta_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \frac{pL^2}{2} \cdot L \cdot 1 = \frac{pL^3}{6EI} \text{ (regula Veresciaghin)}$$

Problema 2.32 (fig. 2.32) Se cere translația pe verticală a secțiunii 3 și rotirea secțiunii 1. Se dă $EI=48000\text{kNm}^2$.



- Fig.2.32 -

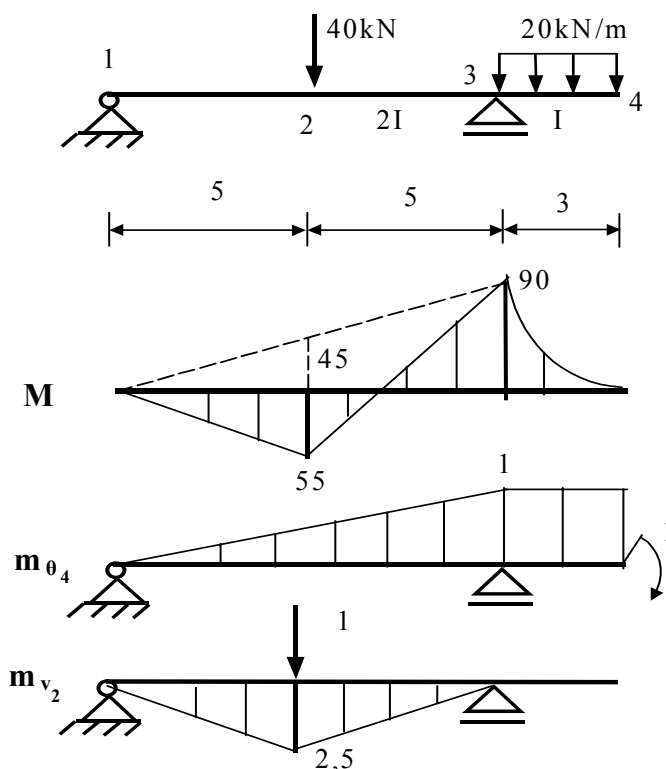
$$v_3 = \int \frac{m_{v_3} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{15 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{320}{EI} = 0,66 \times 10^{-2} \text{ m} = 0,66 \text{ cm}$$

$$\theta_1 = \int \frac{m_{\theta_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{15 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 120 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{80}{EI} = 0,166 \times 10^{-2} \text{ radiani} = 0,095^\circ$$

Problema 2.33 (fig. 2.33) Se cer: θ_4 și v_2 .



- Fig.2.33 -

$$\theta_4 = \int \frac{m_{\theta_4} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 90 \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{70}{EI} \text{ radiani}$$

$$v_2 = \int \frac{m_{v_2} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 100 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \right] = \frac{135,417}{EI} \text{ m}$$

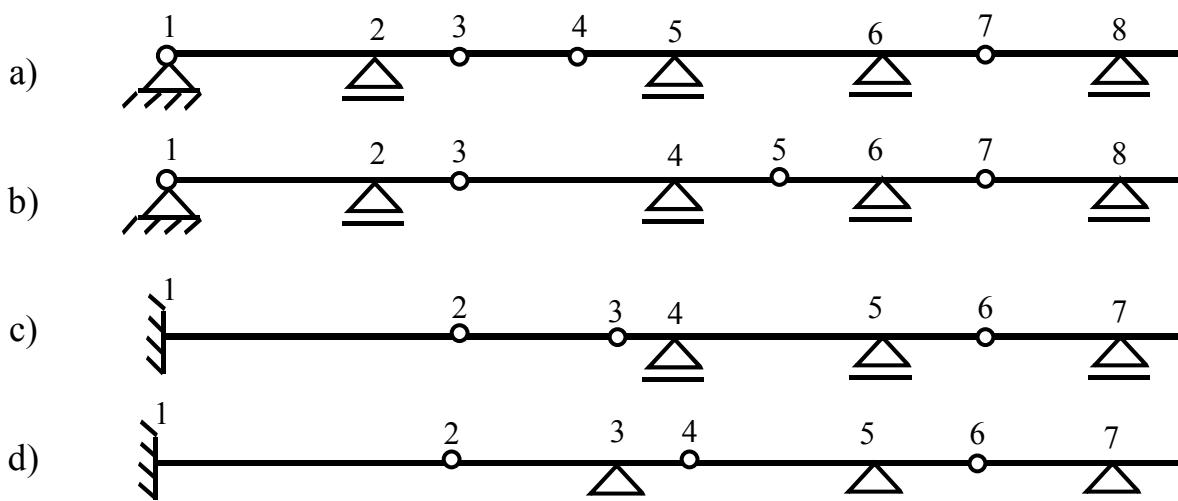
CAPITOLUL III

GRINZI GERBER

Grinzile Gerber - grinzi cu console și articulații - reprezintă ansambluri de grinzi drepte – cu sau fără console - legate între ele prin articulații simple.

În figura III.1 sunt prezentate scheme de grinzi Gerber ce se pot obține prin asamblarea cu articulații interioare. Se constată că ansamblul este format din grinzi principale și grinzi secundare.

Grinzile principale sunt acele grinzi care pot prelua și transmite direct bazei de susținere toate încărcările ce le revin. Grinzile secundare sunt acele grinzi care transmit parțial sau deloc bazei de susținere încărcările ce le revin, o cotă parte sau toată încărcarea fiind transmisă grinzilor principale.



- Fig.III.1 -

De exemplu, grinzile din figura III.1,a și c sunt realizate printr-o succesiune de grindă principală și grindă secundară, iar grinzile din figura III.1,b și d sunt realizate dintr-o singură grindă principală și restul grinzi secundare. De asemenea, se constată că o grindă Gerber are un reazem fix – articulație sau încastrare – care să împiedice deplasarea de corp rigid în lungul axei grinzii.

În primul exemplu grinzile 1-2-3 și 4-5-6-7 sunt grinzi principale, iar grinzile 3-4 și 7-8 sunt grinzi secundare. Grinda 3-4 nu are nici un reazem cu baza și reazemă pe două grinzi principale, în timp ce grinda 7-8 are un reazem simplu cu baza de

susținere. În al doilea caz există o singură grindă principală 1-2-3 iar restul sunt grinzi secundare.

Din punctul de vedere al calculului reacțiunilor și eforturilor, acesta se poate efectua fie pentru ansamblu, fie descompunând grinda Gerber în grinzi componente. În cazul descompunerii în grinzi componente efectul eventualelor forțe ce au direcția axei barei sau formează un unghi cu aceasta este preluat de reazemul fix.

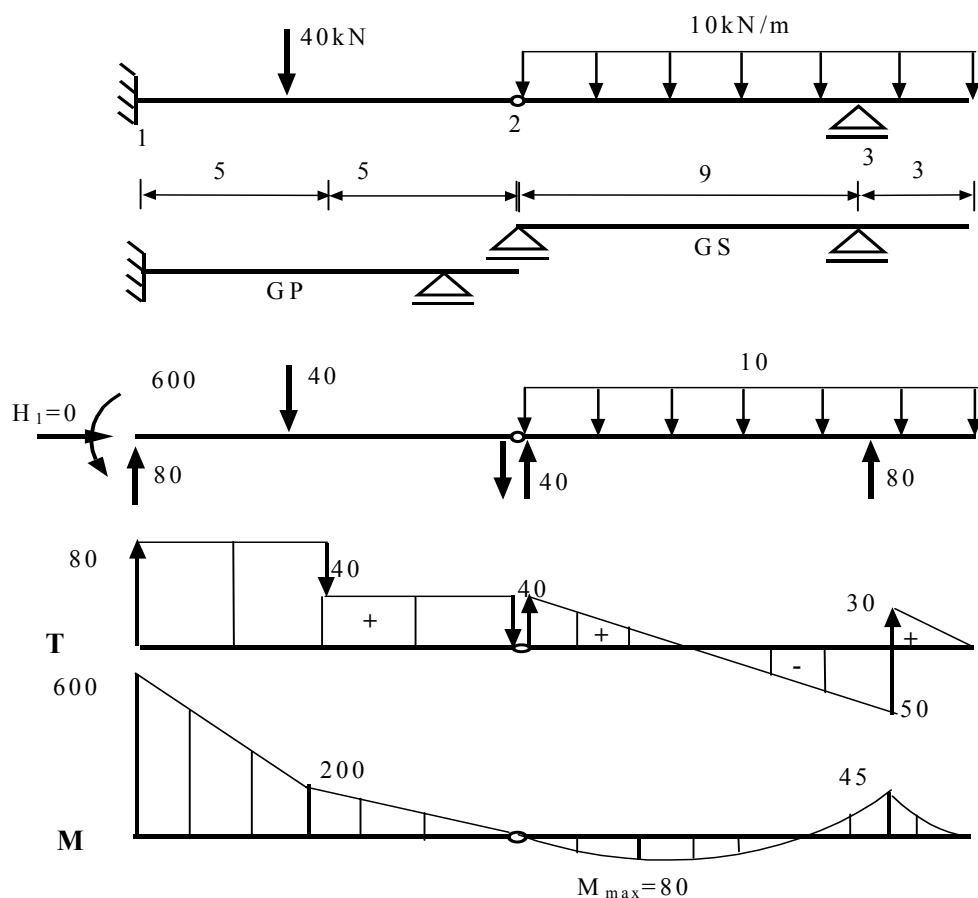
Efectul forțelor normale pe axa barei este preluat de reazemele simple și de cel fix. În această ultimă situație forțele din legăturile interioare sunt calculate și ele permit trasarea mai ușoară a diagramelor de eforturi.

Există două posibilități: fie trasarea diagramelor pe întregul ansamblu (cunoscând reacțiunile și forțele de legătură), fie trasarea diagramelor pe fiecare grindă componentă și obținerea ulterior a diagramelor pe ansamblu, prin simpla alăturare a diagramelor grinzilor componente.

APLICAȚII

A. Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele grinzi Gerber.

Problema 3.1 (fig.3.1)



- Fig. 3.1 -

Calculul reacțiunilor:

Din condiția de echilibru pentru ansamblu, $\sum X_i = 0$, rezultă $H_1 = 0$.

Pentru grinda secundară 2-3 se obține

$$\sum M_2 = 0; \quad 10 \cdot 12 \cdot 6 - V_3 \cdot 9 = 0 \quad V_3 = 80 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad V_2 \cdot 9 - 10 \cdot 12 \cdot 3 = 0 \quad V_2 = 40 \text{ kN}$$

Pentru grinda principală 1-2 se obține

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 40 - 40 = 0 \quad V_1 = 80 \text{ kN}$$

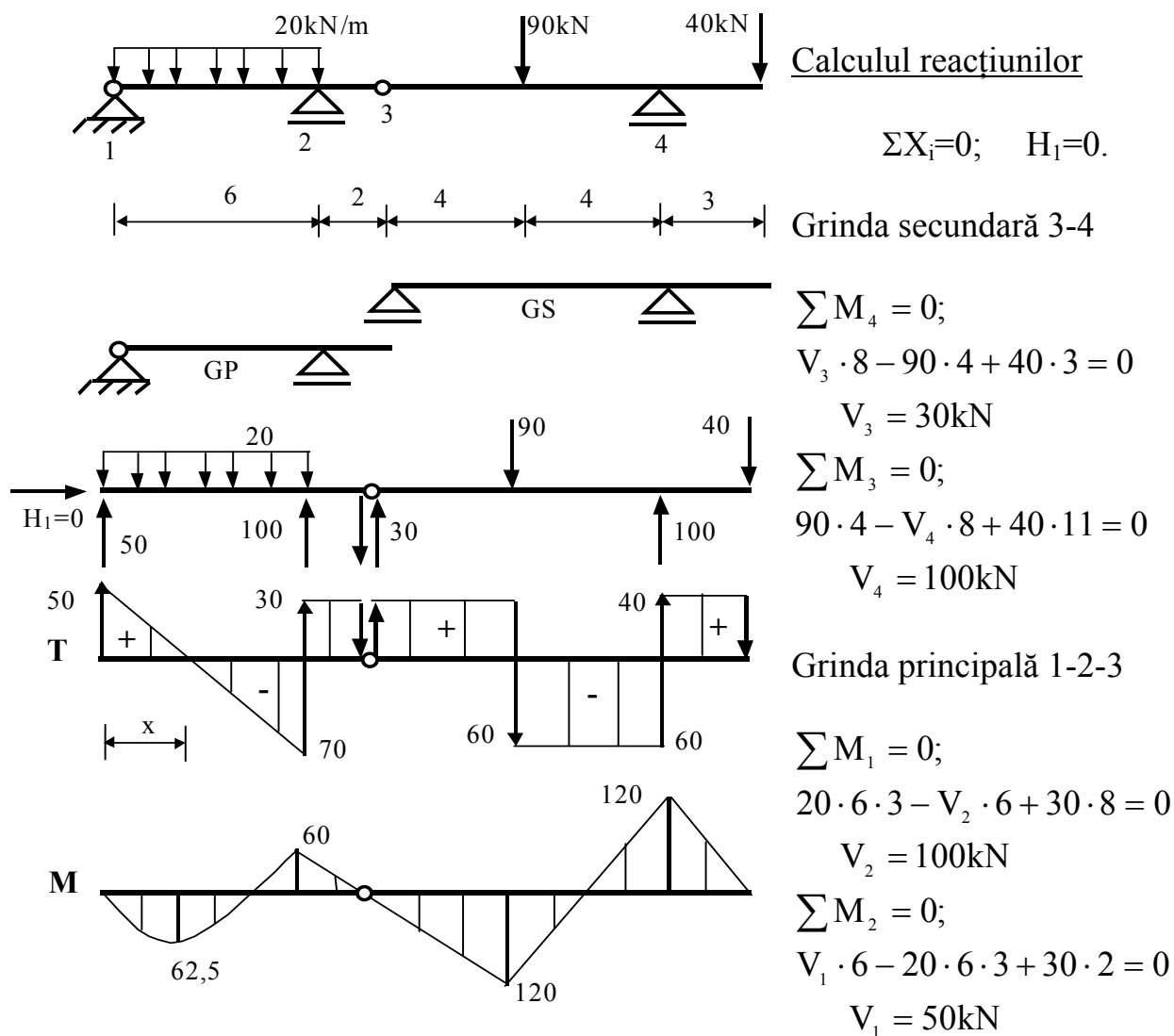
$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 40 \cdot 5 + 40 \cdot 10 = 0 \quad M_1 = 600 \text{ kNm}$$

Calculul eforturilor

$$T_x = 40 - 10 \cdot x = 0; \quad x = 4 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 40 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 80 \text{ kNm}$$

Problema 3.2 (fig.3.2)



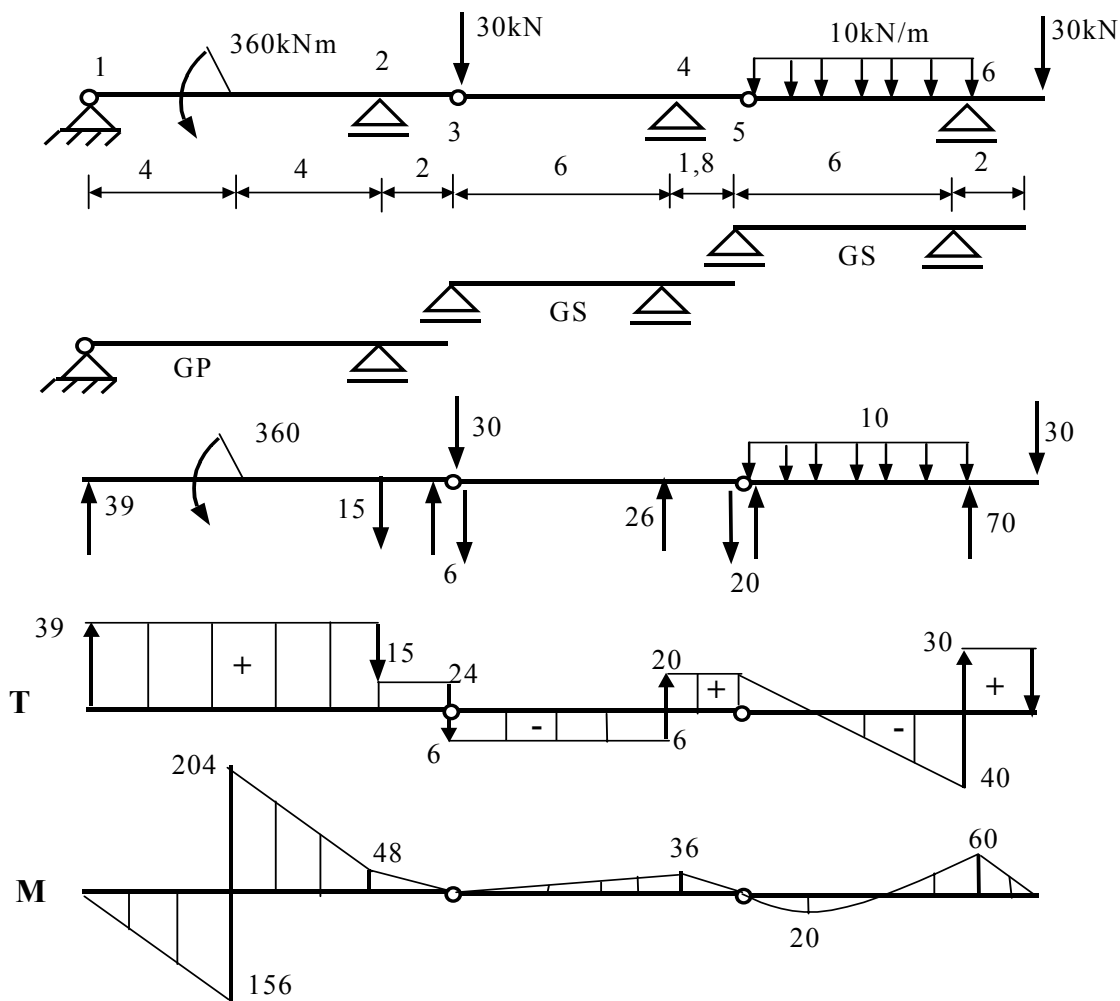
- Fig.3.2 -

Momentul încovoietor maxim pe grinda 1-2-3 are loc în secțiunea în care se anulează forța tăietoare, respectiv

$$T_x = 50 - 20 \cdot x = 0; \quad x = 2,5\text{m}$$

$$M_{\max} = 50 \cdot 2,5 - 20 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 62,5\text{kNm}$$

Problema 3.3(fig.3.3)



- Fig.3.3 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 5-6

$$\sum M_5 = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot 3 - V_6 \cdot 6 + 30 \cdot 8 = 0 \quad V_6 = 70\text{kN}$$

$$\sum M_6 = 0; \quad V_5 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 0 \quad V_5 = 20\text{kN}$$

Forța concentrată din secțiunea 3 se va considera numai pe una dintre cele două grinzi. Aici va fi considerată pe grinda principală.

Grinda secundară 3-4-5

$$\sum M_4 = 0; \quad -V_3 \cdot 6 + 20 \cdot 1,8 = 0 \quad V_3 = 6\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad -V_4 \cdot 6 + 20 \cdot 7,8 = 0 \quad V_4 = 26\text{kN}$$

Grinda principală 1-2-3

$$\sum M_1 = 0; \quad -360 + V_2 \cdot 8 + (30 - 6) \cdot 10 = 0 \quad V_2 = 15\text{kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 360 + (30 - 6) \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 39\text{kN}$$

Calculul eforturilor

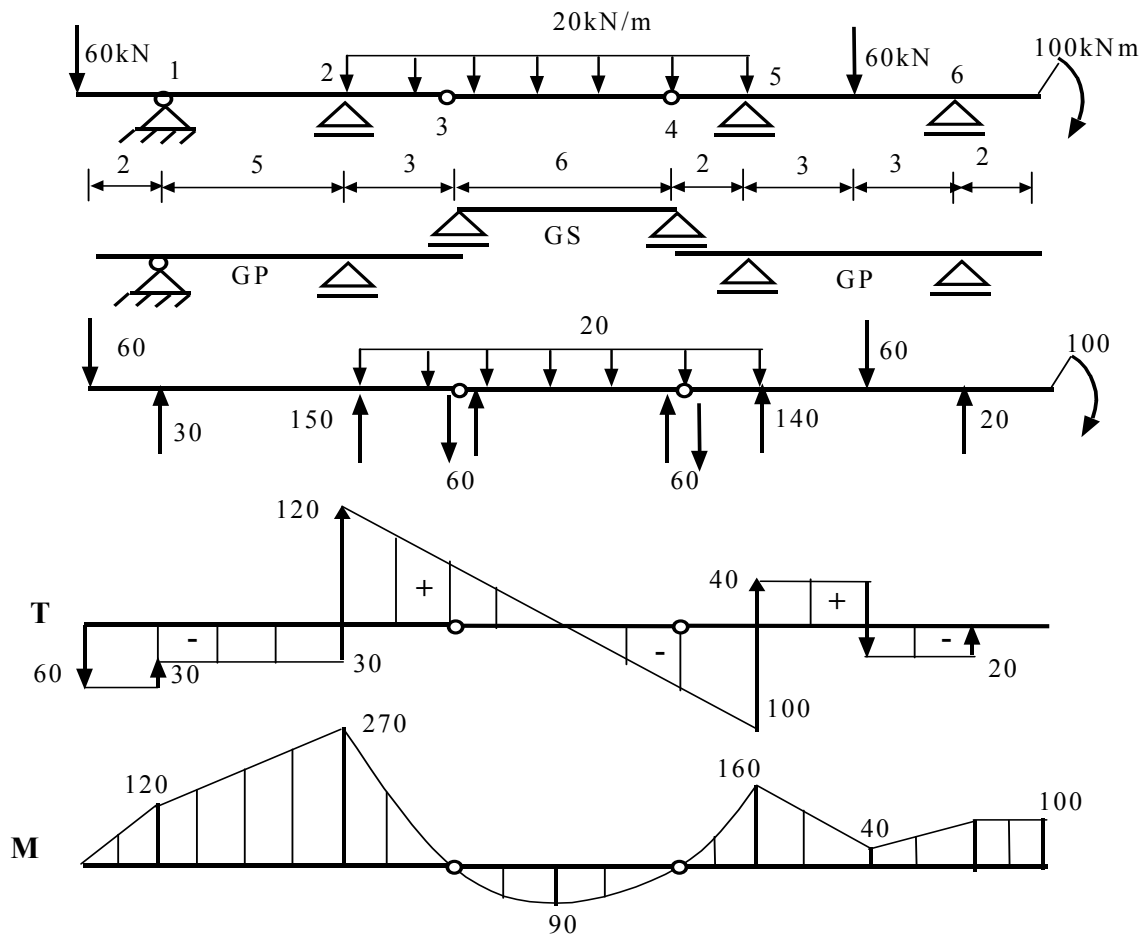
Pe grinda 5-6 forța tăietoare este: $T_x = 20 - 10 \cdot x$

Pentru $T_x=0$ rezultă $x=2$ m

Momentul încovoietor maxim este

$$M_{\max} = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20\text{kNm}$$

Problema 3.4 (fig.3.4)



- Fig.3.4 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 3-4

$$\sum M_4 = 0; \quad V_3 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad V_3 = 60\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - V_4 \cdot 6 = 0 \quad V_4 = 60\text{kN}$$

Grinda principală 4-5-6

$$\sum M_6 = 0; \quad -60 \cdot 8 - 20 \cdot 2 \cdot 7 + V_5 \cdot 6 - 60 \cdot 3 + 100 = 0 \quad V_5 = 140 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad -60 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + 60 \cdot 3 - V_6 \cdot 6 + 100 = 0 \quad V_6 = 20 \text{ kN}$$

Grinda principală 1-2-3

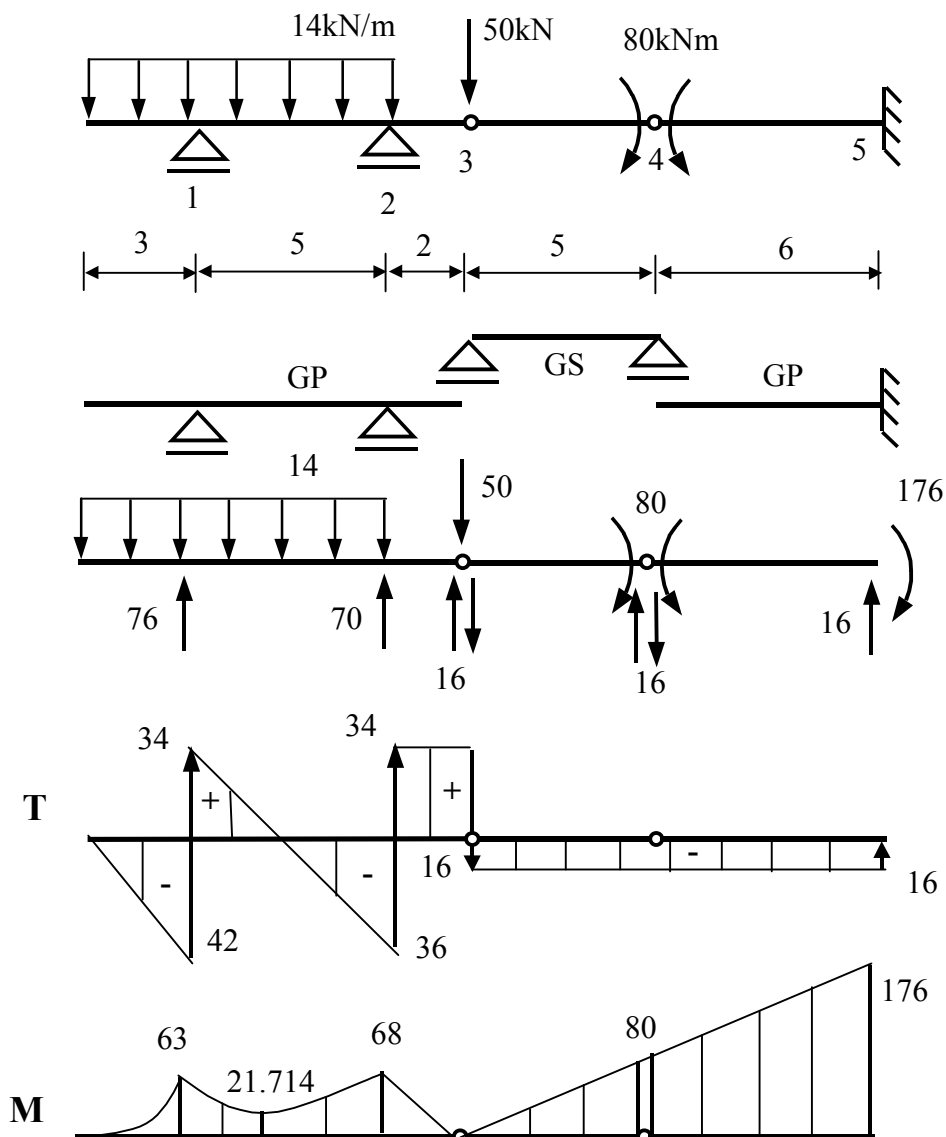
$$\sum M_2 = 0; \quad -60 \cdot 7 + V_1 \cdot 5 + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + 60 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -60 \cdot 2 + V_2 \cdot 5 + 20 \cdot 3 \cdot 6,5 + 60 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 150 \text{ kN}$$

Momentul încovoiitor maxim pe grinda simplu rezemată 3-4 este

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = 90 \text{ kNm}$$

Problema 3.5 (fig.3.5)



- Fig.3.5 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 3-4

$$\sum M_4 = 0; \quad -V_3 \cdot 5 + 80 = 0 \quad V_3 = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 80 - V_4 \cdot 5 = 0 \quad V_4 = 16 \text{ kN}$$

Grinda principală 4-5

$$\sum Y_i = 0; \quad -16 + V_5 = 0 \quad V_5 = 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad -80 - 16 \cdot 6 + M_5 = 0 \quad M_5 = 176 \text{ kNm}$$

Grinda principală 1-2-3

$$\sum M_2 = 0; \quad -14 \cdot 8 \cdot 4 + V_1 \cdot 5 - 16 \cdot 2 + 50 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 76 \text{ kN}$$

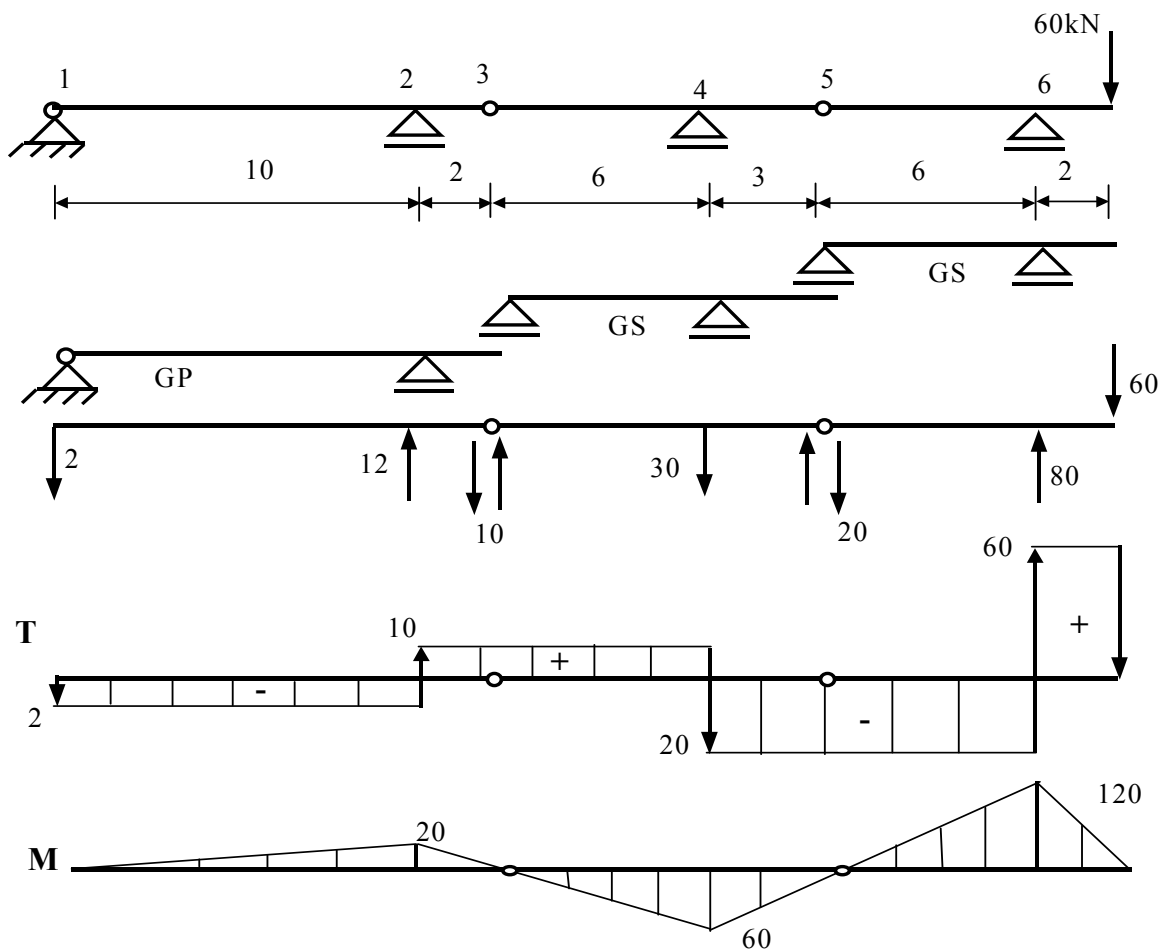
$$\sum M_1 = 0; \quad 14 \cdot 8 \cdot 1 - V_2 \cdot 5 - 16 \cdot 7 + 50 \cdot 7 = 0 \quad V_2 = 70 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

$$T_x = 34 - 14 \cdot x = 0; \quad x = 2,428 \text{ m}$$

$$M_{\min} = -14 \cdot \frac{(3 + 2,428)^2}{2} + 76 \cdot 2,428 = -21,714 \text{ kNm}$$

Problema 3.6 (fig.3.6)



- Fig.3.6 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 5-6

$$\sum M_5 = 0; \quad -V_6 \cdot 6 + 60 \cdot 8 = 0 \quad V_6 = 80\text{kN}$$

$$\sum M_6 = 0; \quad -V_5 \cdot 6 + 60 \cdot 2 = 0 \quad V_5 = 20\text{kN}$$

Grinda secundară 3-4-5

$$\sum M_4 = 0; \quad V_3 \cdot 6 - 20 \cdot 3 = 0 \quad V_3 = 10\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad V_4 \cdot 6 - 20 \cdot 9 = 0 \quad V_4 = 30\text{kN}$$

Grinda principală 1-2-3

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_2 \cdot 10 + 10 \cdot 12 = 0 \quad V_2 = 12\text{kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 10 + 10 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 2\text{kN}$$

Grinda fiind încărcată cu o singură forță, pe consolă, se poate trasa direct diagrama de moment încovoietor, pornind de la momentul din secțiunea 6, $M_6 = -60 \cdot 2 = -120\text{kNm}$ și ținând seama de legea de variație a momentului încovoietor și de faptul că în articulațiile interioare acesta este egal cu zero.

De asemenea, se constată că efectul forței se micșorează pe măsură ce distanța crește față de punctul său de aplicație.

Problema 3.7 (fig.3.7)

Calculul reacțiunilor

Din condiția de echilibru pe orizontală pentru ansamblul grinzii rezultă:

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - 60\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad H_1 = 60\text{kN}$$

Grinda secundară 2-3

$$\sum M_2 = 0; \quad 90 - V_3 \cdot 6 = 0 \quad V_3 = 15\text{kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad -V_2 \cdot 6 + 90 = 0 \quad V_2 = 15\text{kN}$$

Grinda principală 1-2

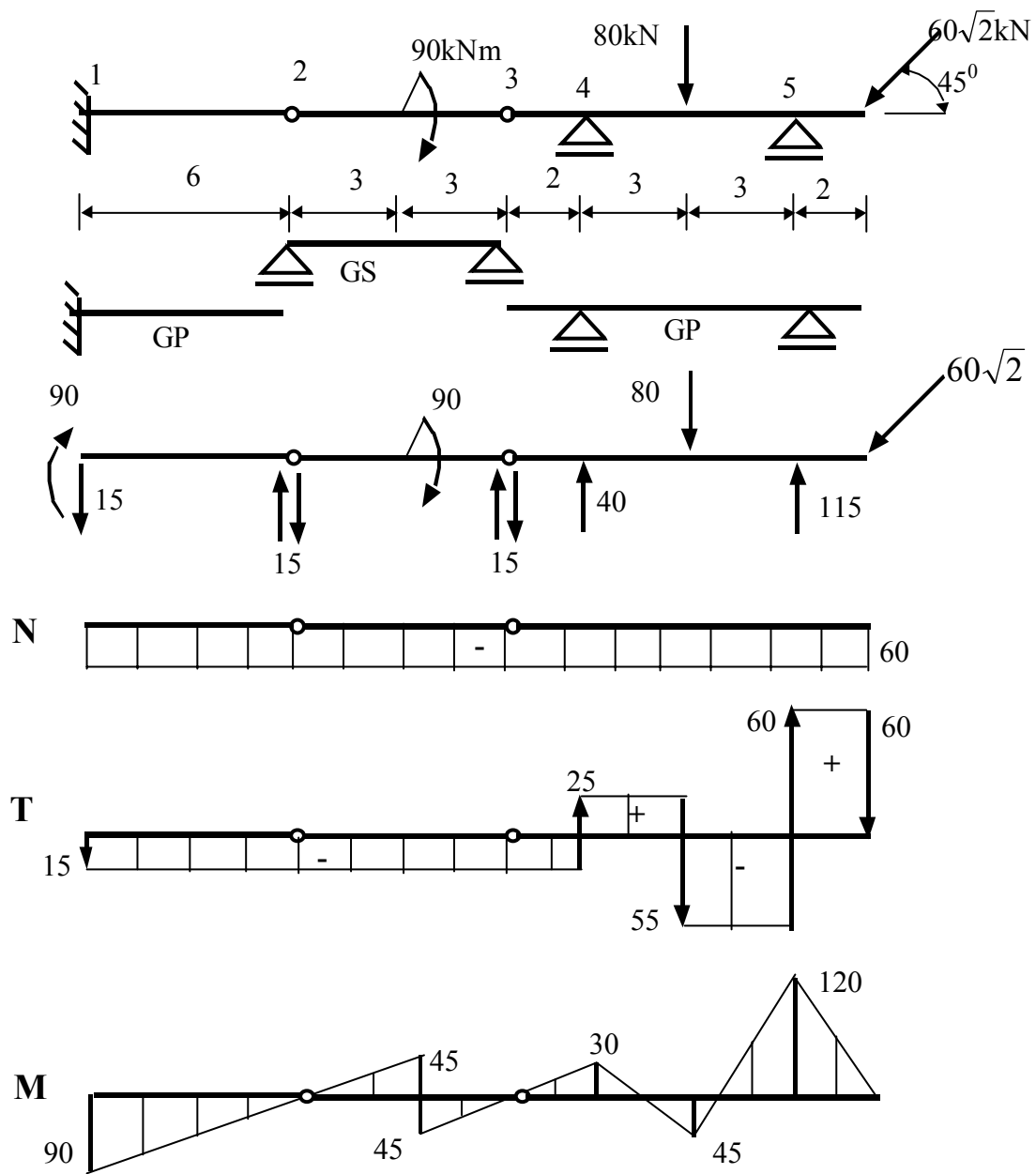
$$\sum Y_i = 0; \quad -V_1 + 15 = 0 \quad V_1 = 15\text{kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad M_1 - 15 \cdot 6 = 0 \quad M_1 = 90\text{kNm}$$

Grinda principală 3-4-5

$$\sum M_5 = 0; \quad -15 \cdot 8 + V_4 \cdot 6 - 80 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 0 \quad V_4 = 40\text{kN}$$

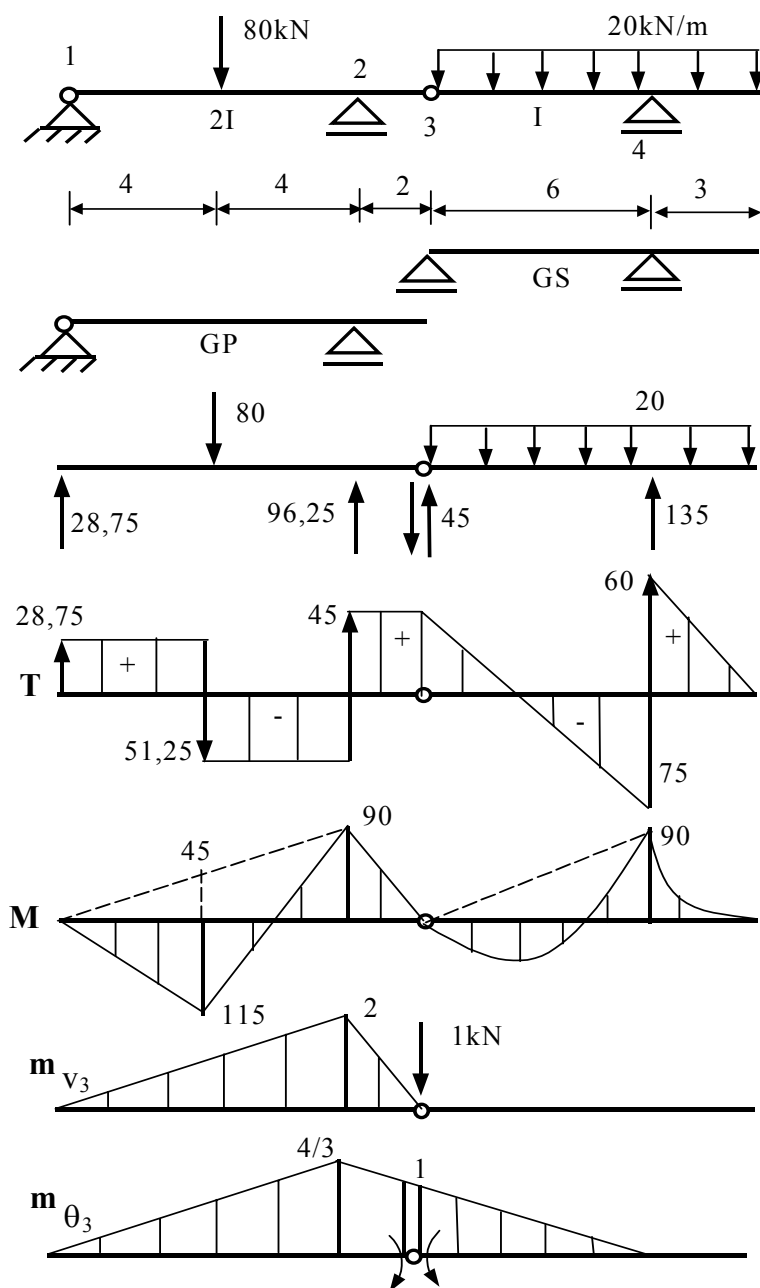
$$\sum M_4 = 0; \quad -15 \cdot 2 + 80 \cdot 3 - V_5 \cdot 6 + 60 \cdot 8 = 0 \quad V_5 = 115\text{kN}$$



-Fig.3.7 -

B. Să se traseze diagramele de eforturi și să se calculeze deplasările indicate la următoarele grinzi Gerber.

Problema 3.8 (fig.3.8) Translația v_3 și rotirea θ_3^{rel} .



- Fig.3.8 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 3-4

$$\begin{aligned}\sum M_4 &= 0; \\ V_3 \cdot 6 - 20 \cdot 9 \cdot 1,5 &= 0 \\ V_3 &= 45 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_3 &= 0; \\ 20 \cdot 9 \cdot 4,5 - V_4 \cdot 6 &= 0 \\ V_4 &= 135 \text{ kN}\end{aligned}$$

Grinda principală 1-2-3

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; \\ V_1 \cdot 8 - 80 \cdot 4 + 45 \cdot 2 &= 0 \\ V_1 &= 28,75 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_1 &= 0; \\ 80 \cdot 4 - V_2 \cdot 8 + 45 \cdot 10 &= 0 \\ V_1 &= 96,25 \text{ kN}\end{aligned}$$

Calculul deplasărilor

$$v_3 = \int \frac{m_{v_3} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 160 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \right] = -\frac{20}{EI} \text{ (metri)}$$

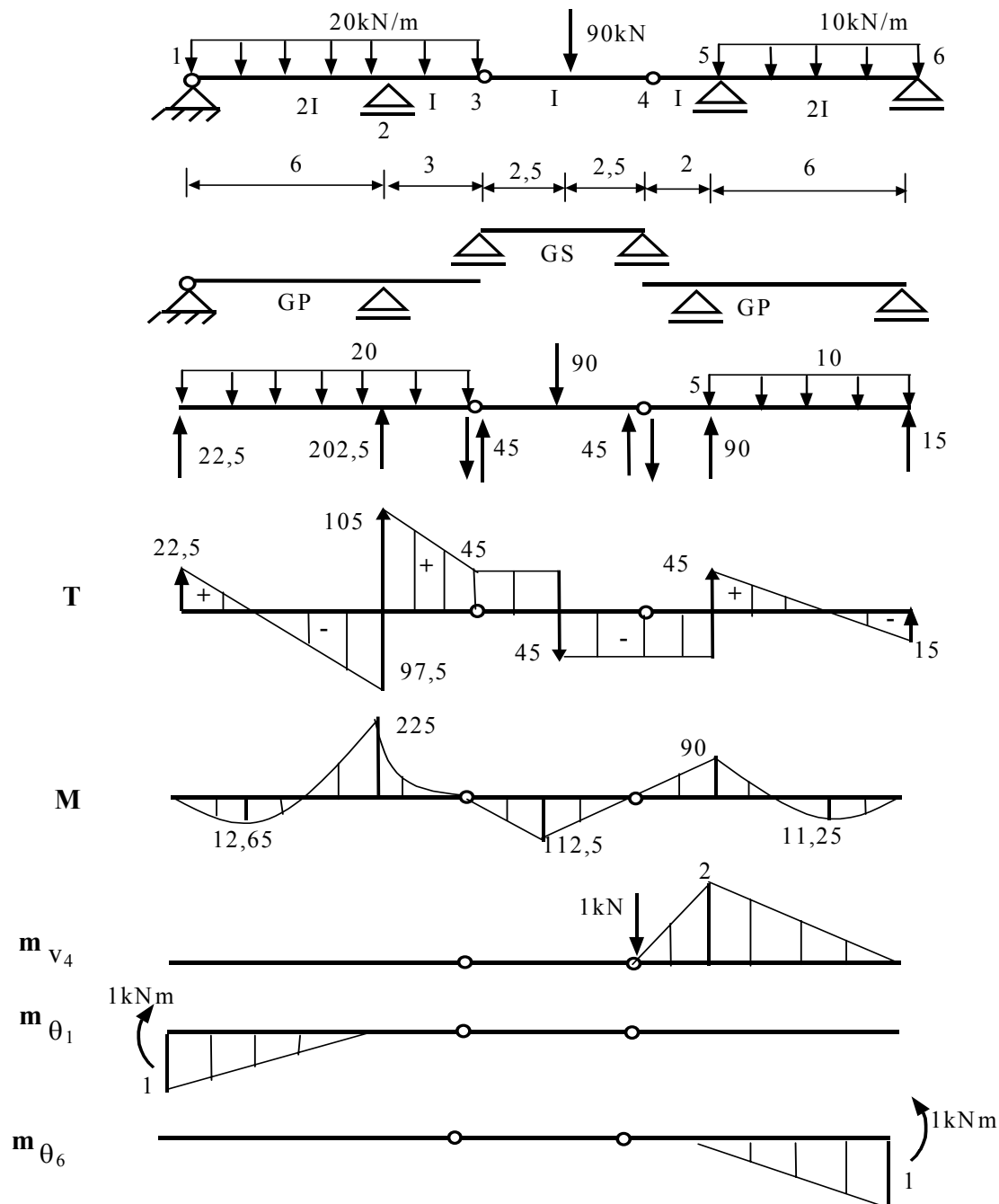
Deplasarea are loc în sens invers sensului forței egale cu unitatea.

$$\theta_3^{\text{rel}} = \int \frac{m_{\theta_3} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 160 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 90 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = -\frac{85}{EI} (\text{metri})$$

Rotirea relativă are loc în sens invers sensului momentelor egale cu unitatea.

Problema 3.9 (fig.3.9) Translația v_4 și rotirile θ_1 și θ_6 .



- Fig.3.9 -

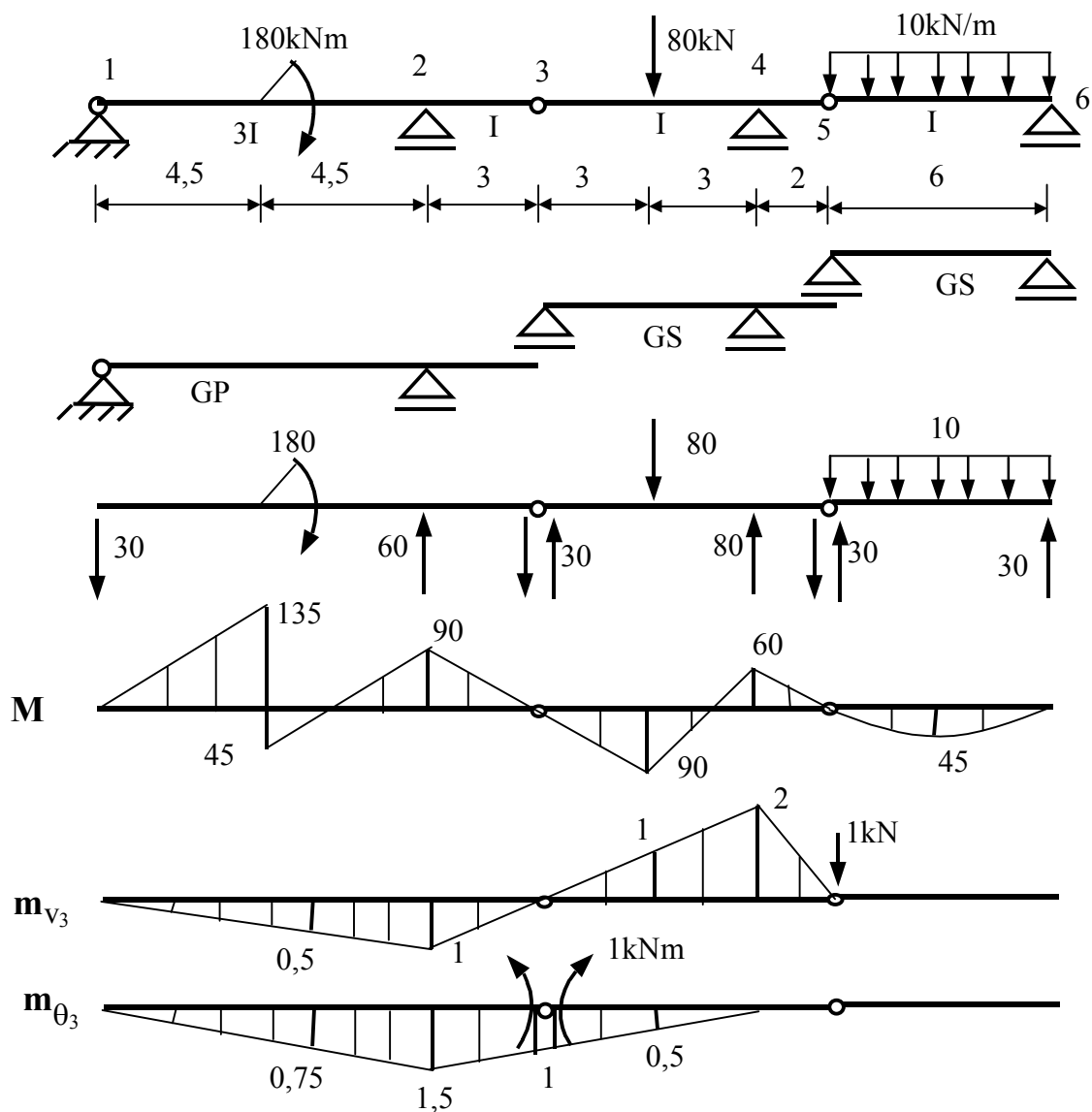
$$v_4 = \int \frac{m_{v_4} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{210}{EI} (\text{metri})$$

$$\theta_1 = \int \frac{m_{\theta_1} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 225 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{22,5}{EI} (\text{radiani})$$

$$\theta_6 = \int \frac{m_{\theta_6} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 0$$

Problema 3.10 (fig.3.10) Translația v_5 și rotirea relativă θ_3^{rel}



- Fig.3.10 -

Calculul reacțiunilor

Grinda secundară 5-6

$$\sum M_6 = 0; \quad V_5 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad V_5 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot 3 - V_6 \cdot 6 = 0 \quad V_6 = 30 \text{ kN}$$

Grinda secundară 3-4-5

$$\sum M_4 = 0; \quad V_3 \cdot 6 - 80 \cdot 3 + 30 \cdot 2 = 0 \quad V_3 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 80 \cdot 3 - V_4 \cdot 6 + 30 \cdot 8 = 0 \quad V_4 = 80 \text{ kN}$$

Grinda principală 1-2-3

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 9 + 180 + 30 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 180 - V_2 \cdot 9 + 30 \cdot 12 = 0 \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

Calculul deplasărilor

$$\begin{aligned} v_5 &= \int \frac{m_{v_5} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 135 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 45 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 90 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right] = \\ &= -\frac{197,5}{EI} (\text{metri}) \end{aligned}$$

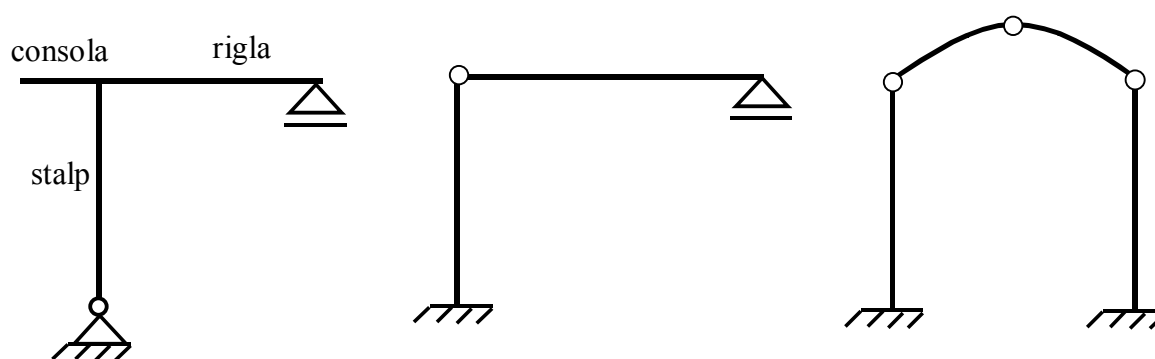
$$\begin{aligned} \theta_3^{\text{rel}} &= \int \frac{m_{\theta_3^{\text{rel}}} \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 135 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 45 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 90 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \\ &= -\frac{161,25}{EI} (\text{radiani}) \end{aligned}$$

CAPITOLUL IV

CADRE STATIC DETERMINATE

Cadrele reprezintă o categorie de structuri frecvent utilizate în practică. Cadrele static determinate sunt utilizate mai rar ca structuri de rezistență pentru construcțiile reale, dar sunt utilizate ca instrument de calcul pentru cadrele static nedeterminate, rezolvate prin metoda eforturilor. De aceea studiul lor prezintă importanță deosebită.

Cadrele sunt alcătuite de obicei din bare drepte asamblate între ele prin noduri rigide sau articulate. Mai rar apar și bare curbe în alcătuirea cadrelor, dar acestea reprezintă numai rigle (fig.IV.1).



- Fig.IV.1 -

Nodurile rigide se caracterizează prin aceea că deformarea prin încovoiere a unei bare, conduce la deformarea prin încovoiere și a celorlalte bare ce se intersectează în nod. În plus secțiunile din nod, ale tuturor barelor, au aceeași rotire și aceeași translație. Având aceeași rotire unghiul inițial dintre bare se regăsește între tangentele duse în nod la forma deformată.

Nodurile articulate se caracterizează prin aceea că deformarea prin încovoiere a unei bare nu conduce și la deformarea celorlalte bare ce formează nodul. Secțiunile din nod au aceeași translație dar rotații diferite – are loc rotire relativ între secțiuni – ceea ce conduce la modificarea unghiului inițial dintre bare.

Calculul cadrelor static determinate se realizează în modul următor: se calculează reacțiunile din condițiile de echilibru static (vezi Capitolul I), se trasează diagramele de eforturi, se verifică aceste diagrame și se calculează deplasările importante.

Verificarea diagramelor de eforturi se realizează scriind echilibrul unei părți a structurii, de obicei echilibrul unui nod.

O categorie aparte o formează cadrele simetrice în raport cu o axă. Simetria se referă la elementele geometrice – lungimi de bare, dimensiunile și forma secțiunilor transversale – la legăturile interioare și cele cu baza de susținere.

Cadrelle simetrice pot fi încărcate cu încărcări oarecare, cu încărcări simetrice sau antisimetrice. Orice încărcare oarecare poate fi descompusă într-o încărcare simetrică și într-o încărcare antisimetrică. Ca urmare există următoarele particularități:

- la cadrelle simetrice, încărcate simetric, reacțiunile, diagramele de forță axială și de moment încovoietor sunt simetrice, diagrama de forță tăietoare este antisimetrică, iar deformată este simetrică;
- la cadrelle simetrice, încărcate antisimetric, reacțiunile, diagramele de forță axială și de moment încovoietor sunt antisimetrice, diagrama de forță tăietoare este simetrică, iar deformată este antisimetrică.

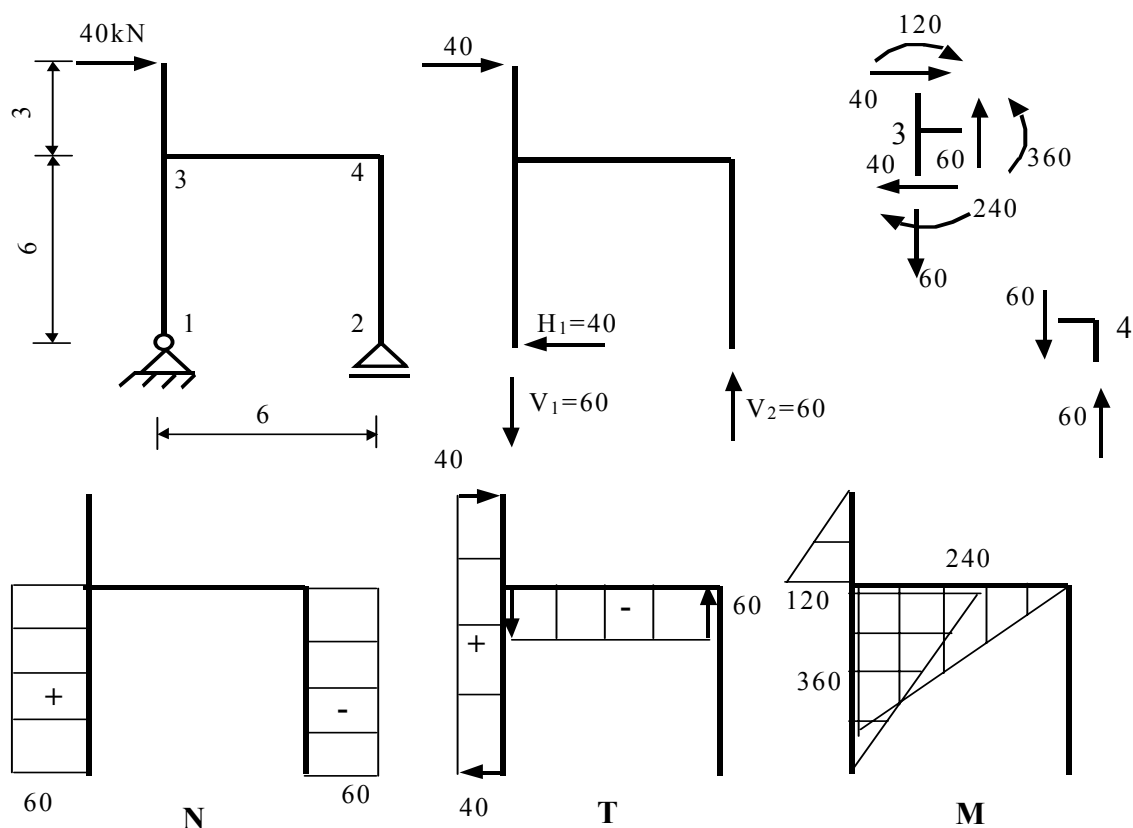
În calculul deplasărilor apar următoarele situații particulare:

- rezultatul integrării a două diagrame simetrice între ele sau a două diagrame antisimetrice între ele este diferit de zero;
- rezultatul integrării unei diagrame simetrice cu una antisimetrică (sau invers) este egal cu zero.

APLICAȚII

A. Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele cadre static determinate.

Problema 4.1 (fig.4.1)



- Fig.4.1 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad 40 - H_1 = 0 \quad H_1 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 40 \cdot 9 - V_2 \cdot 6 = 0 \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 40 \cdot 9 - V_1 \cdot 6 = 0 \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad -60 + 60 = 0$$

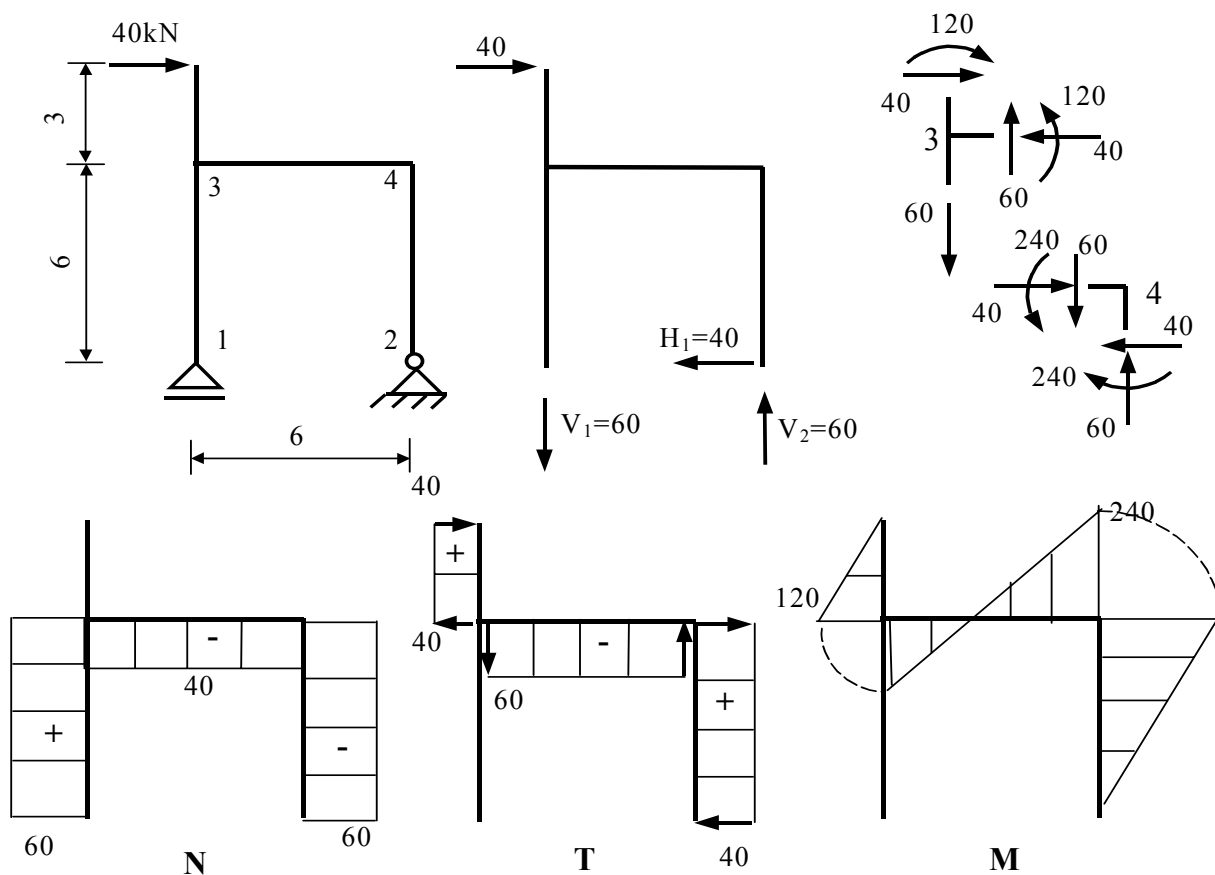
Calculul eforturilor

$$N_{13} = +V_1 = 60 \text{ kN}; \quad N_{24} = -V_2 = -60 \text{ kN}$$

$$T_{13} = +H_1 = 40 \text{ kN}; \quad T_{34} = -V_1 = -60 \text{ kN}$$

$$M_{31} = 6 \cdot H_1 = 240 \text{ kNm}; \quad M_{34} = 6 \cdot V_2 = 360 \text{ kNm}; \quad M_c = 3 \cdot 40 = 120 \text{ kNm}$$

Problema 4.2 (fig.4.2) Aceeași structură de la problema 4.1 dar cu reazemele schimbate.



- Fig.4.2 -

Calculul reacțiunilor

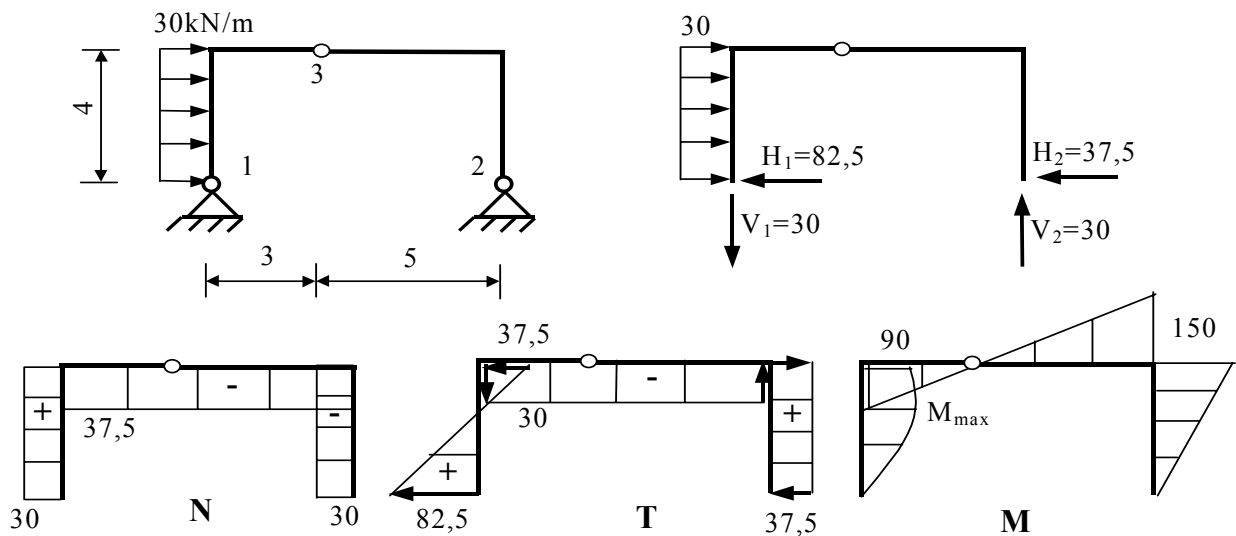
$$\sum X_i = 0; \quad 40 - H_2 = 0 \quad H_2 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 40 \cdot 9 - V_1 \cdot 6 = 0 \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 40 \cdot 9 - V_2 \cdot 6 = 0 \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad -60 + 60 = 0$$

Problema 4.3 (fig.4.3)



- Fig.4.3 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad 30 \cdot 4 \cdot 2 - V_1 \cdot 8 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 \cdot 4 \cdot 2 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad -30 + 30 = 0$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 4 - 30 \cdot 5 = 0; \quad H_2 = 37.5 \text{ kNm}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 4 - 30 \cdot 3 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad H_1 = 82.5 \text{ kNm}$$

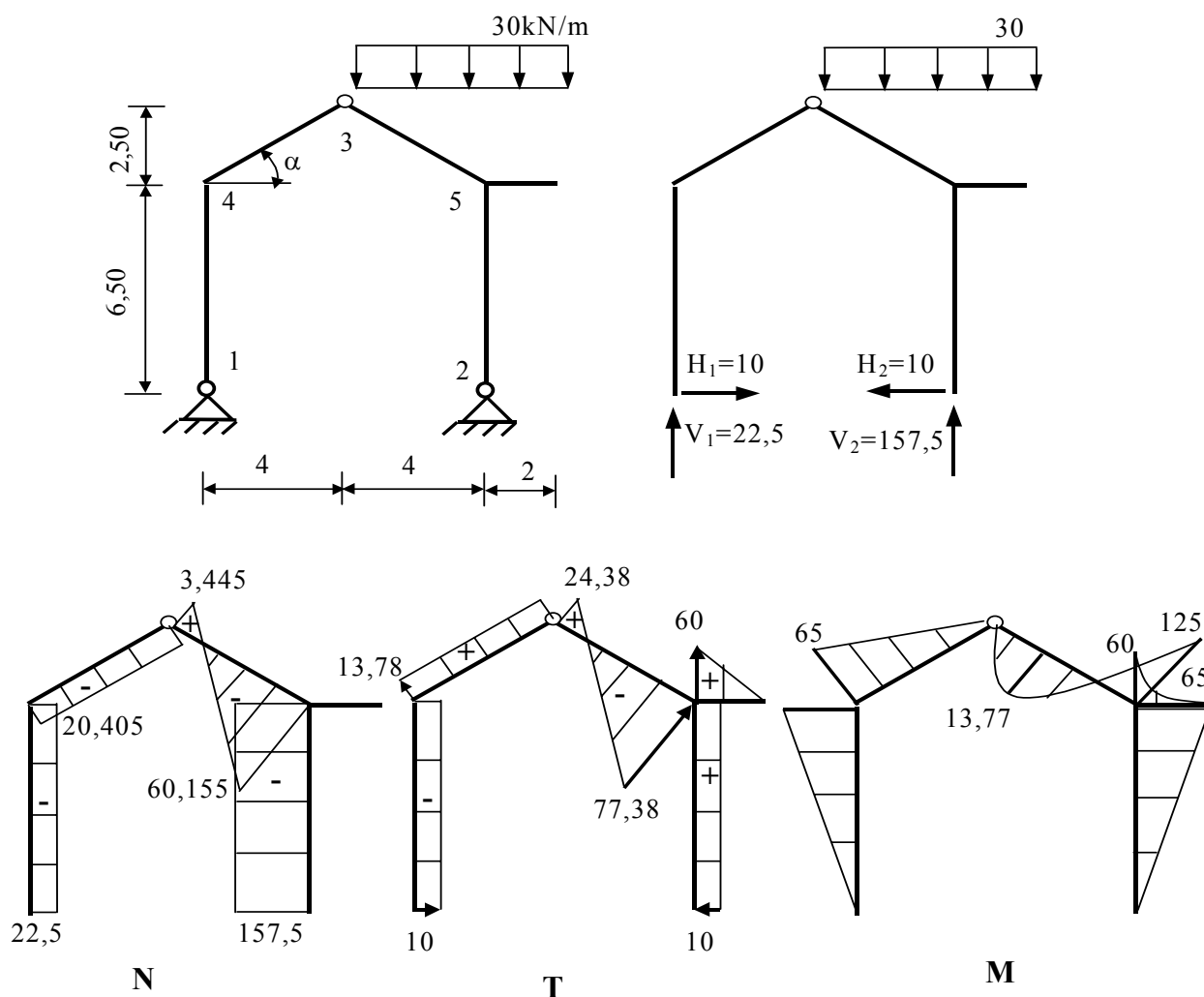
$$\text{Verificare } \sum X_i = 0; \quad 82.5 - 30 \cdot 4 + 37.5 = 0$$

Calculul eforturilor

$$T_x = 82.5 - 30 \cdot x = 0; \quad x = 2.75 \text{ m}$$

$$M_{\text{max}} = 82.5 \cdot 2.75 - 30 \cdot \frac{2.75^2}{2} = 113.4375 \text{ kNm}$$

Problema 4.4 (fig.4.4)



-Fig.4.4 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 6 \cdot 1 = 0 \quad V_1 = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 \cdot 6 \cdot 7 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 157,5 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad 22,5 - 30 \cdot 6 - 157,5 = 0$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 22,5 \cdot 4 - H_1 \cdot 9 = 0; \quad H_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 9 - 157,5 \cdot 4 + 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad H_2 = 10 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum X_i = 0; \quad 10 - 10 = 0$$

Calculul eforturilor

$$\cos \alpha = 0,848 \quad \sin \alpha = 0,53$$

$$N_{43} = -H_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha = -20,405 \text{ kN}$$

$$N_{35} = -H_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha = 3,445 \text{ kN}$$

$$N_{53} = N_{35} - 30 \cdot 4 \cdot \sin \alpha = -60,155 \text{ kN sau}$$

$$N_{53} = -(V_2 - 30 \cdot 2) \sin \alpha - H_2 \cos \alpha = -60,155 \text{ kN}$$

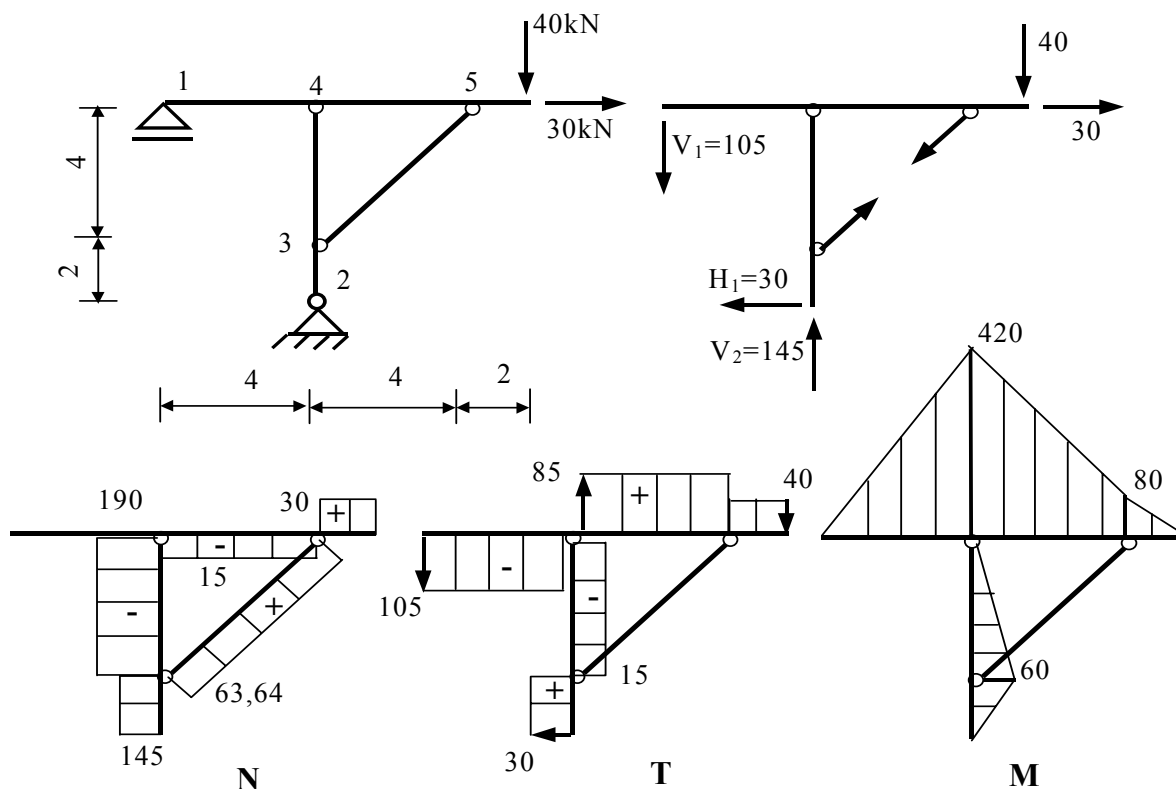
$$T_{43} = V_1 \cos \alpha - H_1 \sin \alpha = 13,78 \text{ kN}$$

$$T_{35} = V_1 \cos \alpha + H_1 \sin \alpha = 24,38 \text{ kN}$$

$$T_{53} = T_{35} - 30 \cdot 4 \cdot \cos \alpha = -77,38 \text{ kN} \text{ sau}$$

$$T_5 = -(V_2 - 30 \cdot 2) \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = -77,38 \text{ kN}$$

Problema 4.5 (fig.4.5)



- Fig.4.5 -

Calculul reacțiunilor

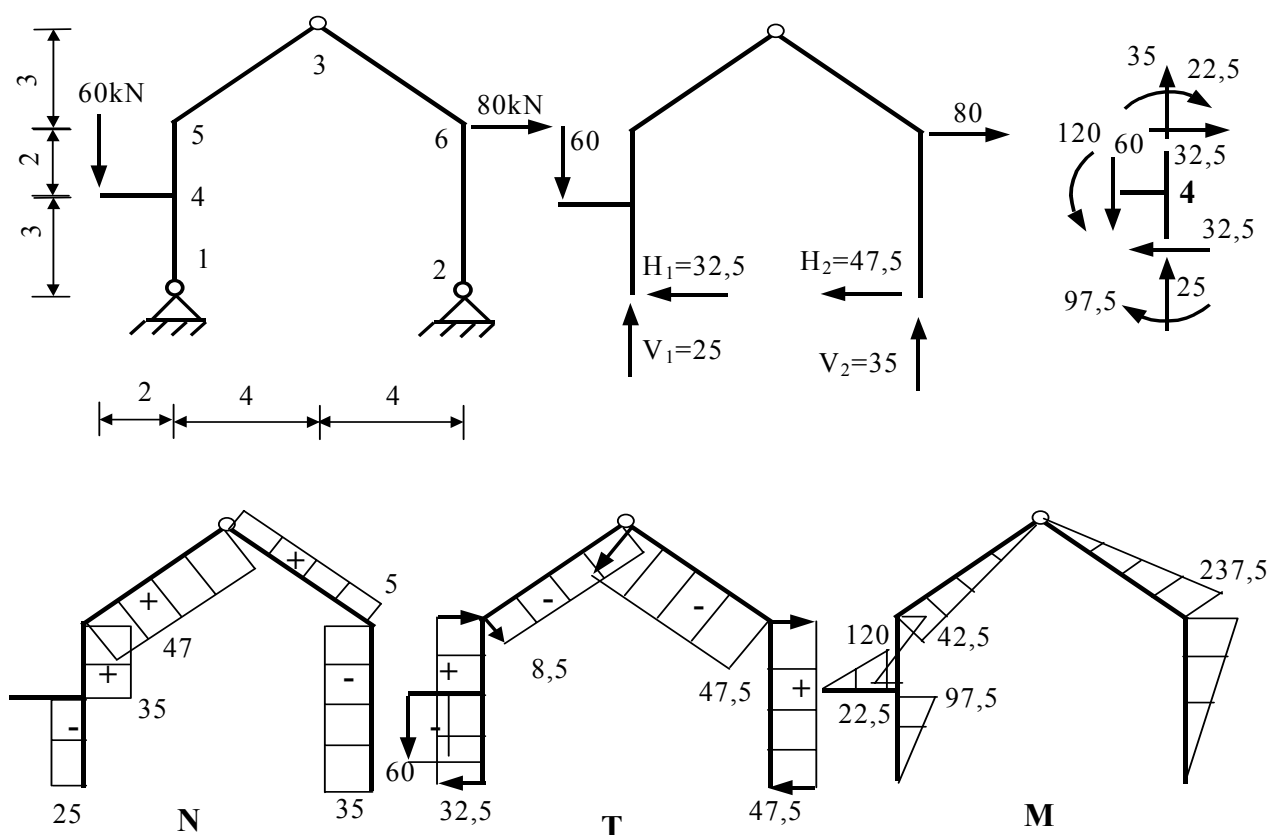
Din condițiile de echilibru ale structurii în ansamblu se obține:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & -H_2 + 30 &= 0 & H_2 &= 30 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= 0; & -V_1 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 30 \cdot 6 &= 0 & V_1 &= 105 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & 30 \cdot 6 - V_2 \cdot 4 + 40 \cdot 10 &= 0 & V_2 &= 145 \text{ kN} \end{aligned}$$

Calculul efortului din bara dublu articulată 3-5

$$\sum M_4^{\text{stalp}} = 0; \quad H_2 \cdot 6 - N_{35} \cos 45^\circ \cdot 4 = 0 \quad N_{35} = 63,64 \text{ kN}$$

Problema 4.6 (fig.4.6)



-Fig.4.6 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad -60 \cdot 10 + V_1 \cdot 8 + 80 \cdot 5 = 0 \quad V_1 = 25 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -60 \cdot 2 + 80 \cdot 5 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 35 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0; \quad -60 + 25 + 35 = 0$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad -60 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + H_1 \cdot 8 = 0; \quad H_1 = 37,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 8 - 45 \cdot 4 - 80 \cdot 3 = 0; \quad H_2 = 42,5 \text{ kN}$$

Verificare $\sum X_i = 0; \quad -32,5 - 47,5 + 80 = 0$

Calculul eforturilor

$$\cos \alpha = 0,8 \quad \sin \alpha = 0,6$$

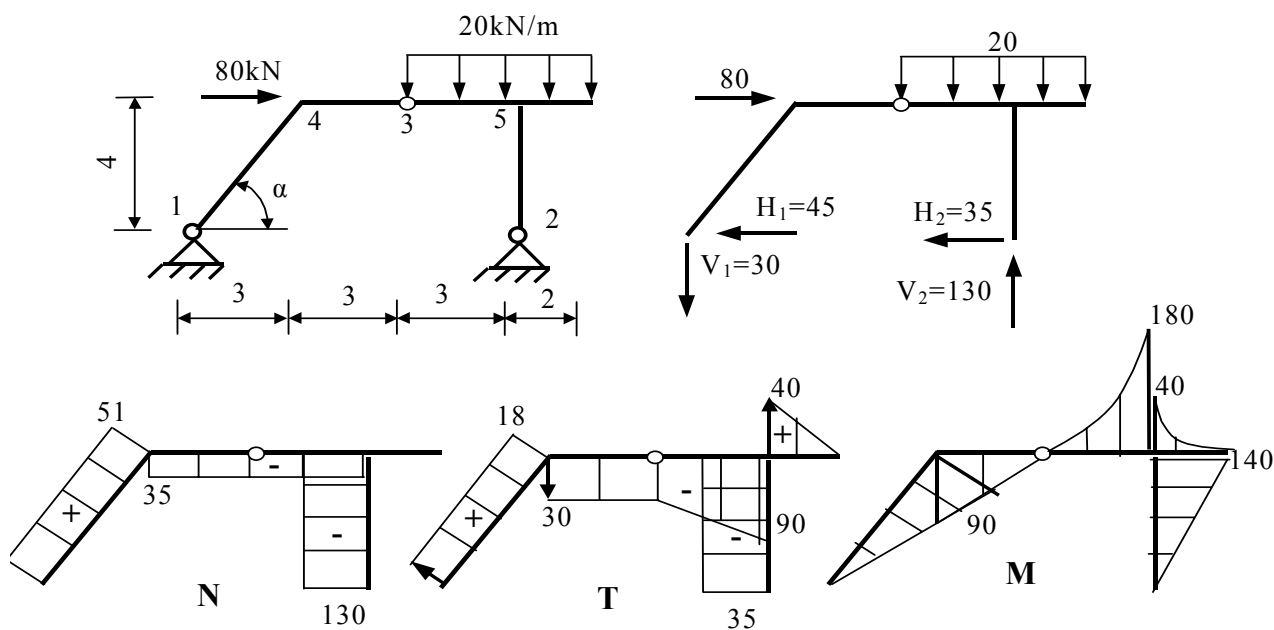
$$N_{53} = H_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha + 60 \sin \alpha = 47 \text{ kN}$$

$$N_{63} = (80 - H_2) \cos \alpha - V_2 \sin \alpha = 5 \text{ kN}$$

$$T_{53} = (V_1 - 60) \cos \alpha + H_1 \sin \alpha = -8,5 \text{ kN}$$

$$T_{63} = -V_2 \cos \alpha - (80 - H_2) \sin \alpha = -47,5 \text{ kN}$$

Problema 4.7 (fig.4.7)



- Fig.4.7 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 9 + 80 \cdot 4 - 20 \cdot 5 \cdot 0,5 = 0 \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 80 \cdot 4 + 20 \cdot 5 \cdot 8,5 - V_2 \cdot 9 = 0 \quad V_2 = 130 \text{ kN}$$

Verificare $\sum Y_i = 0; \quad -30 + 130 - 20 \cdot 5 = 0$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 4 - 30 \cdot 6 = 0; \quad H_1 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad 45 - 80 + H_2 = 0; \quad H_2 = 35 \text{ kN}$$

Verificare $\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 130 \cdot 3 + 35 \cdot 4 = 0$

Calculul eforturilor

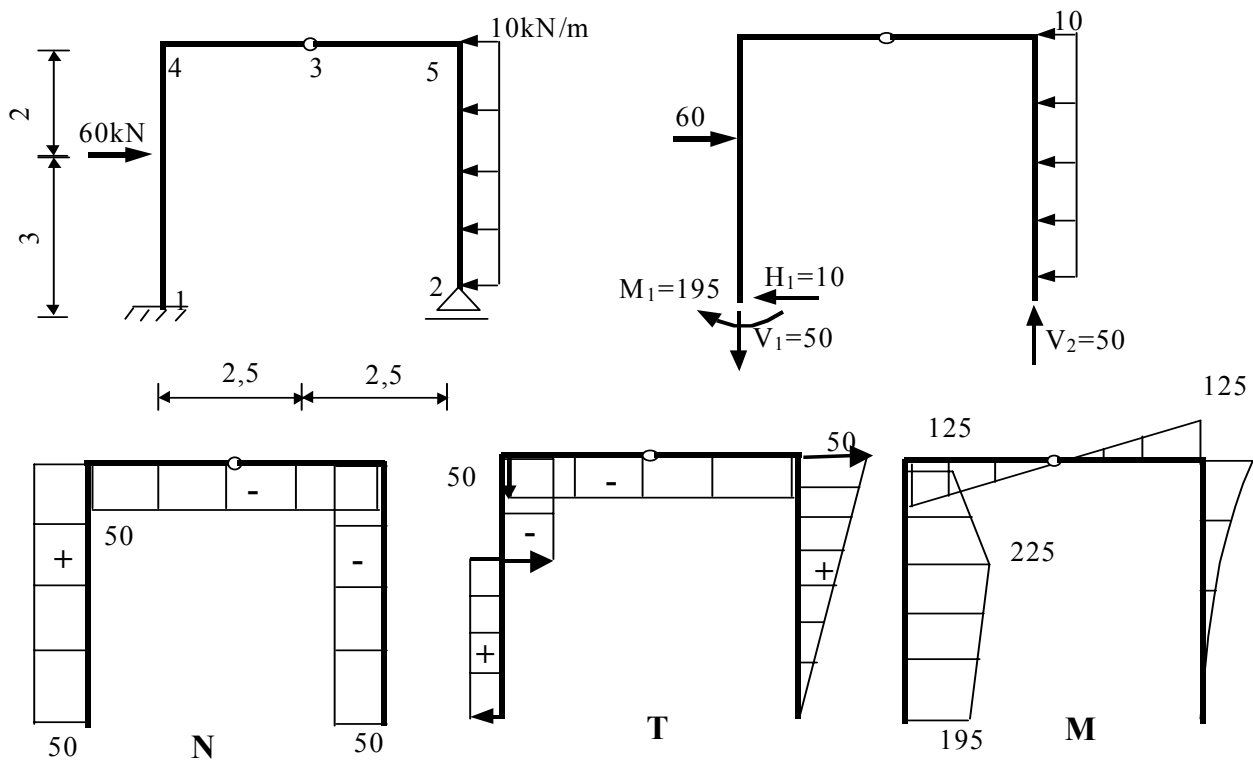
$$\sin \alpha = 0,8 \quad \cos \alpha = 0,6$$

$$N_{14} = H_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha = 51 \text{ kN}$$

$$T_{14} = H_1 \sin \alpha - V_1 \cos \alpha = 18 \text{ kN}$$

$$M_4 = 45 \cdot 4 - 30 \cdot 3 = 90 \text{ kNm}$$

Problema 4.8 (fig.4.8)

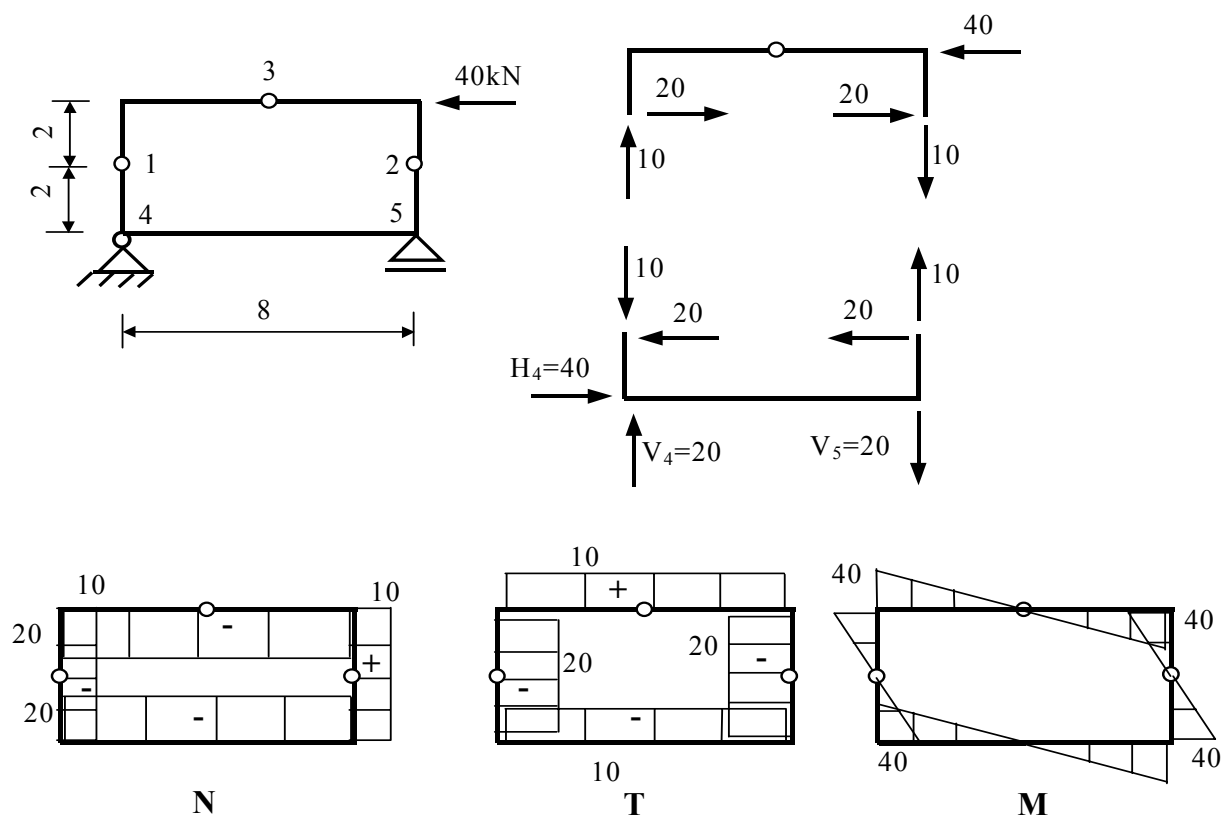


- Fig.4.8 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned}
 \sum X_i &= 0; & 60 - H_1 - 10 \cdot 5 &= 0 & H_1 &= 10 \text{ kN} \\
 \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; & 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_2 \cdot 2,5 &= 0 & V_2 &= 50 \text{ kN} \\
 \sum Y_i &= 0; & -V_1 + 50 &= 0 & V_1 &= 50 \text{ kN} \\
 \sum M_1 &= 0; & M_1 + 60 \cdot 3 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - 50 \cdot 5 &= 0 & M_1 &= 195 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Problema 4.9 (fig.4.9)



- Fig.4.9 -

Calculul reacțiunilor

- cadrul secundar 1-3-2

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 8 - 40 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -40 \cdot 2 + V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 10 \cdot 4 - H_1 \cdot 2 = 0; \quad H_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad 10 \cdot 4 - H_2 \cdot 2 = 0; \quad H_2 = 20 \text{ kN}$$

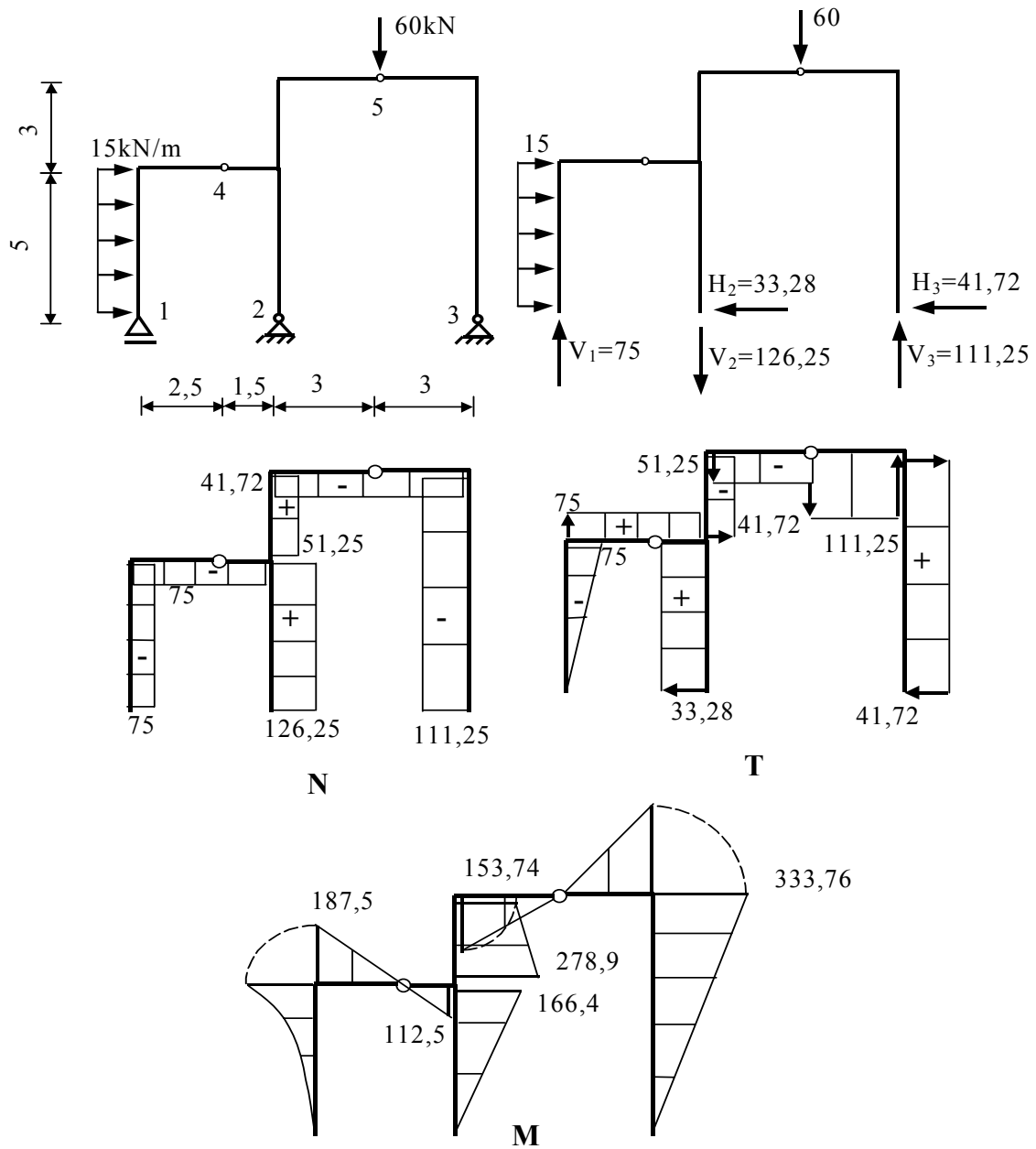
- cadrul principal 1-4-5-2

$$\sum X_i = 0; \quad H_4 - 20 - 20 = 0; \quad H_4 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad V_4 \cdot 8 - 10 \cdot 8 - 20 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0; \quad V_4 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0; \quad -20 \cdot 2 - 20 \cdot 2 - 10 \cdot 8 + V_5 \cdot 8 = 0; \quad V_5 = 20 \text{ kN}$$

Problema 4.10 (fig.4.10)



- Fig.4.10 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_4^{\text{st}} = 0; \quad V_1 \cdot 2,5 - 15 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \quad V_1 = 75 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 75 \cdot 4 + 15 \cdot 5 \cdot 2,5 + 60 \cdot 3 - V_3 \cdot 6 = 0 \quad V_3 = 111,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0; \quad 75 \cdot 10 + 15 \cdot 5 \cdot 2,5 + V_2 \cdot 6 - 60 \cdot 3 = 0 \quad V_2 = -126,25 \text{ kN}$$

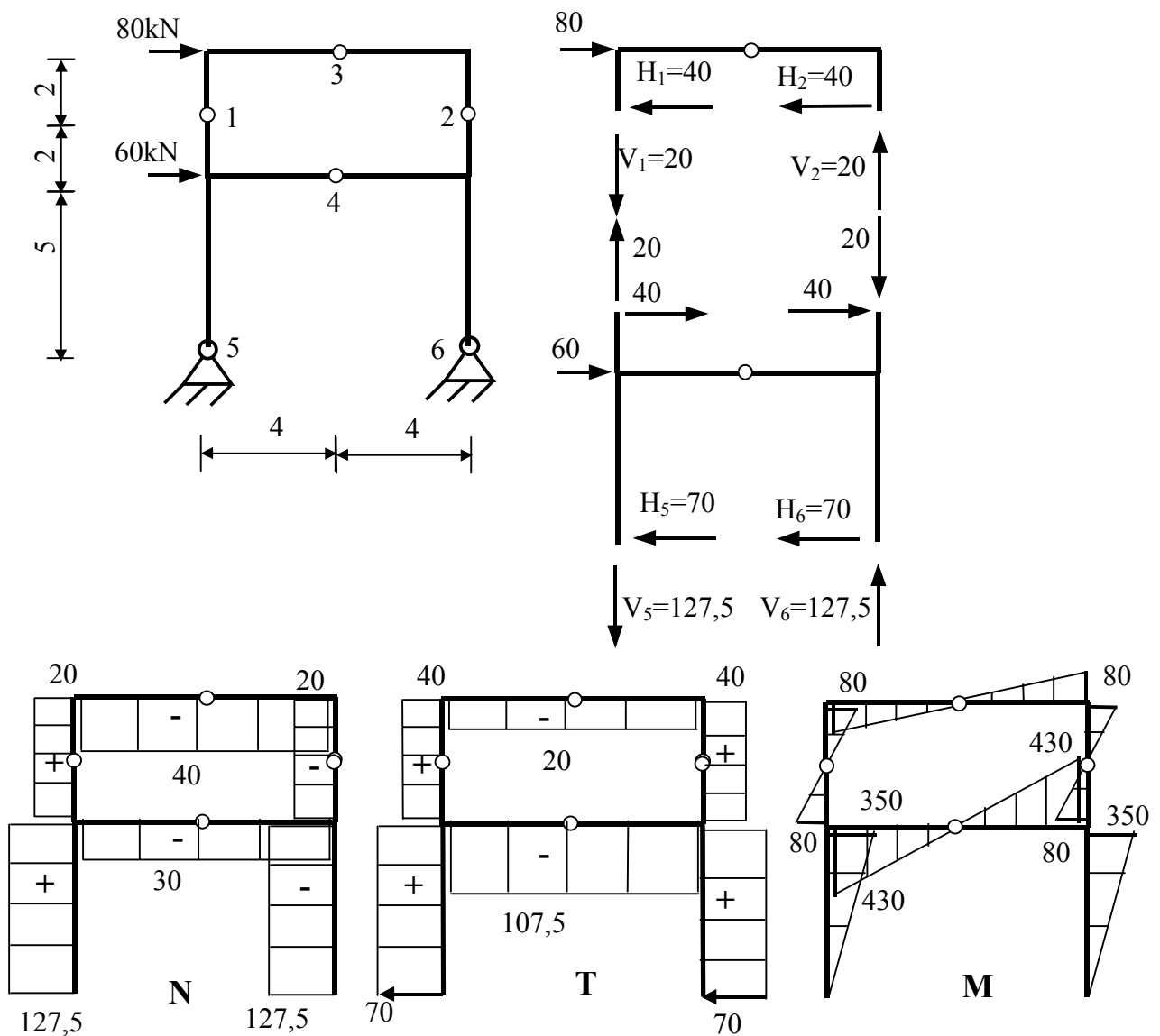
$$\text{Verificare } \sum Y_i = 0; \quad 75 - 126,25 - 60 + 111,25 = 0$$

$$\sum M_5^{\text{dr}} = 0; \quad H_3 \cdot 8 - 111,25 \cdot 3 = 0; \quad H_3 = 41,72 \text{ kN}$$

$$\sum M_5^{\text{st}} = 0; \quad 75 \cdot 7 - 15 \cdot 5 \cdot 5,5 + H_2 \cdot 8 - 126,25 \cdot 3 = 0 \quad H_2 = 33,28 \text{ kN}$$

$$\text{Verificare } \sum X_i = 0; \quad 15 \cdot 5 - 33,28 - 41,72 = 0$$

Problema 4.11 (fig.4.11)



- Fig.4.11 -

Calculul reacțiunilor

Cadrul superior 1-3-2

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 8 + 80 \cdot 2 = 0 \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 80 \cdot 2 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = 0 \quad H_2 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = 0 \quad H_1 = 40 \text{ kN}$$

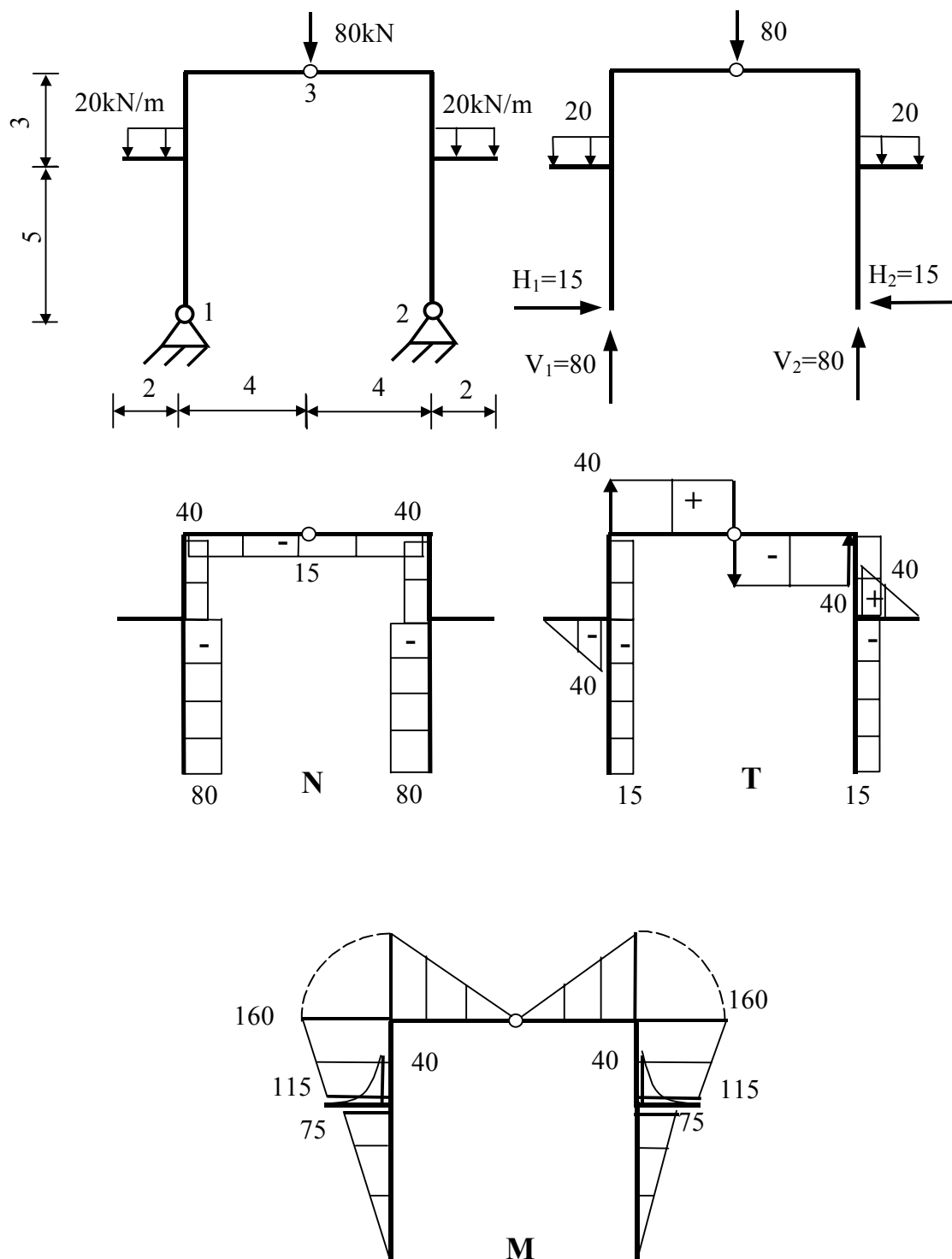
Cadrul inferior 5-4-6

$$\sum M_6 = 0; \quad -V_5 \cdot 8 + 60 \cdot 5 + 40 \cdot 7 + 20 \cdot 8 + 40 \cdot 7 = 0 \quad V_5 = 127,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad 60 \cdot 5 + 40 \cdot 7 + 40 \cdot 7 + 20 \cdot 8 - V_6 \cdot 8 = 0 \quad V_6 = 127,5 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}\sum M_4^{st} &= 0; & H_5 \cdot 5 - 127,5 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 20 \cdot 4 &= 0 & H_5 &= 70\text{kN} \\ \sum M_4^{dr} &= 0; & H_6 \cdot 5 - 127,5 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 20 \cdot 4 &= 0 & H_6 &= 70\text{kN}\end{aligned}$$

Problema 4.12 (fig.4.12)



- Fig.4.12 -

Calculul reacțiunilor

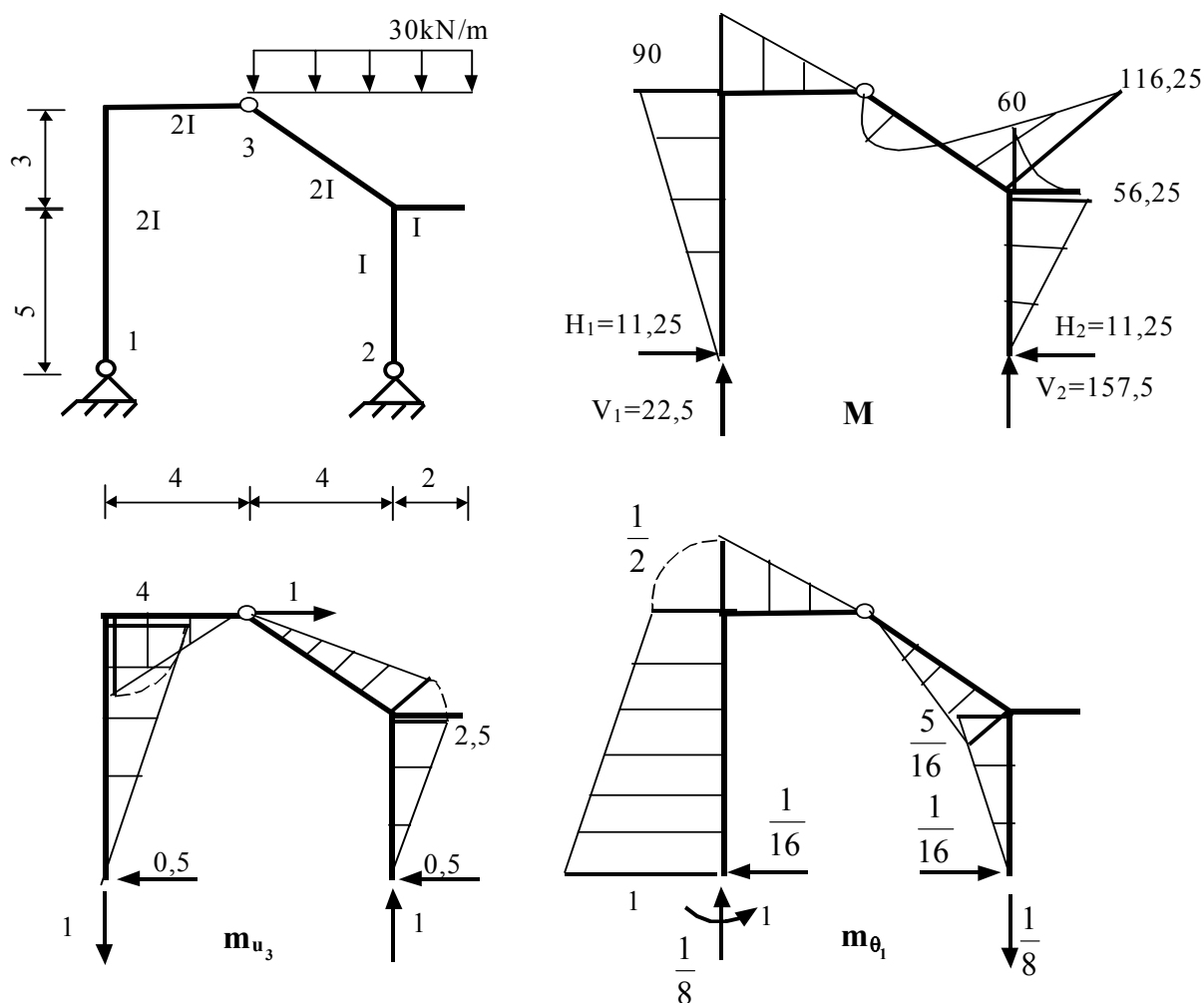
Structura este simetrică și încărcată simetric. Reacțiunile sunt simetrice.

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; & -20 \cdot 2 \cdot 9 + V_1 \cdot 8 - 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 1 &= 0 & V_1 &= 80 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & -20 \cdot 2 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 9 - V_2 \cdot 8 &= 0 & V_2 &= 80 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{st}} &= 0; & -20 \cdot 2 \cdot 5 + 8 \cdot 4 - H_1 \cdot 8 &= 0 & H_1 &= 15 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; & H_2 \cdot 8 - 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 5 &= 0 & H_2 &= 15 \text{ kN}\end{aligned}$$

Diagramele de forță axială și de moment încovoietor sunt simetrice iar diagrama de forță tăietoare este antisimetrică.

B. Să se calculeze deplasările indicate la următoarele structuri.

Problema 4.13 (fig.4.13) Translația u_3 și rotirea θ_1



- Fig.4.13 -

Calculul reacțiunilor (pentru forțele reale)

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 6 \cdot 1 = 0 \quad V_1 = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 30 \cdot 6 \cdot 7 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 157,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 22,5 \cdot 4 - H_1 \cdot 8 = 0 \quad H_1 = 11,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 8 - 157,5 \cdot 4 + 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad H_2 = 11,25 \text{ kN}$$

Calculul reacțiunilor (pentru translatia u_3)

$$\sum M_2 = 0; \quad 1 \cdot 8 - V_1 \cdot 8 = 0 \quad V_1 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 1 \cdot 8 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 0 \quad H_1 = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 0 \quad H_2 = 0,5 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} u_3 = \int \frac{m_{u_3} M}{EI} dx = & \frac{1}{2EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 116,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5 \right] + \\ & + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 56,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right] = \frac{602,81}{EI} (\text{metri}) \end{aligned}$$

Calculul reacțiunilor (pentru rotirea θ_1)

$$\sum M_2 = 0; \quad -1 + V_1 \cdot 8 = 0 \quad V_1 = \frac{1}{8} \text{ kN}$$

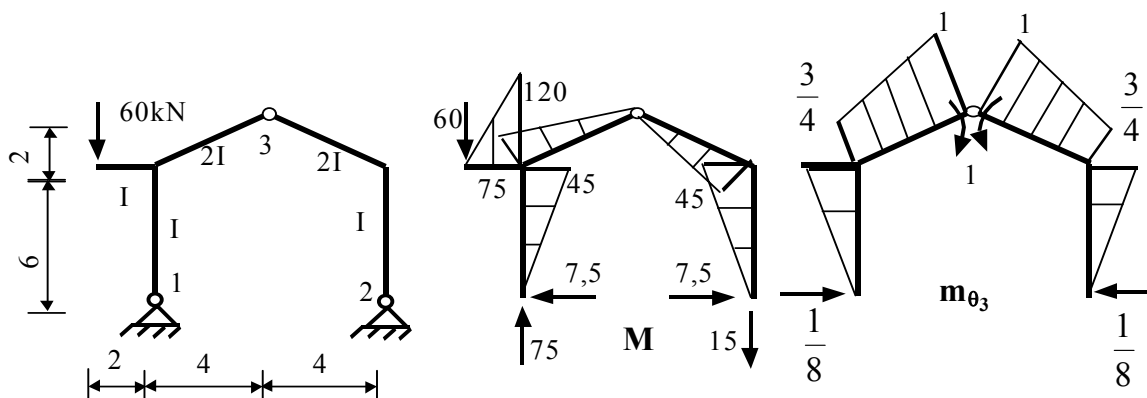
$$\sum M_1 = 0; \quad -1 + V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = \frac{1}{8} \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad \frac{1}{8} \cdot 4 - H_1 \cdot 8 = 0 \quad H_1 = \frac{1}{16} \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad -1 + \frac{1}{8} \cdot 4 + H_1 \cdot 8 = 0 \quad H_1 = \frac{1}{16} \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = \int \frac{m_{\theta_1} M}{EI} dx = & \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 90 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 116,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} \right] - \\ & - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 56,25 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} \right] = \frac{271,68}{EI} (\text{radiani}) \end{aligned}$$

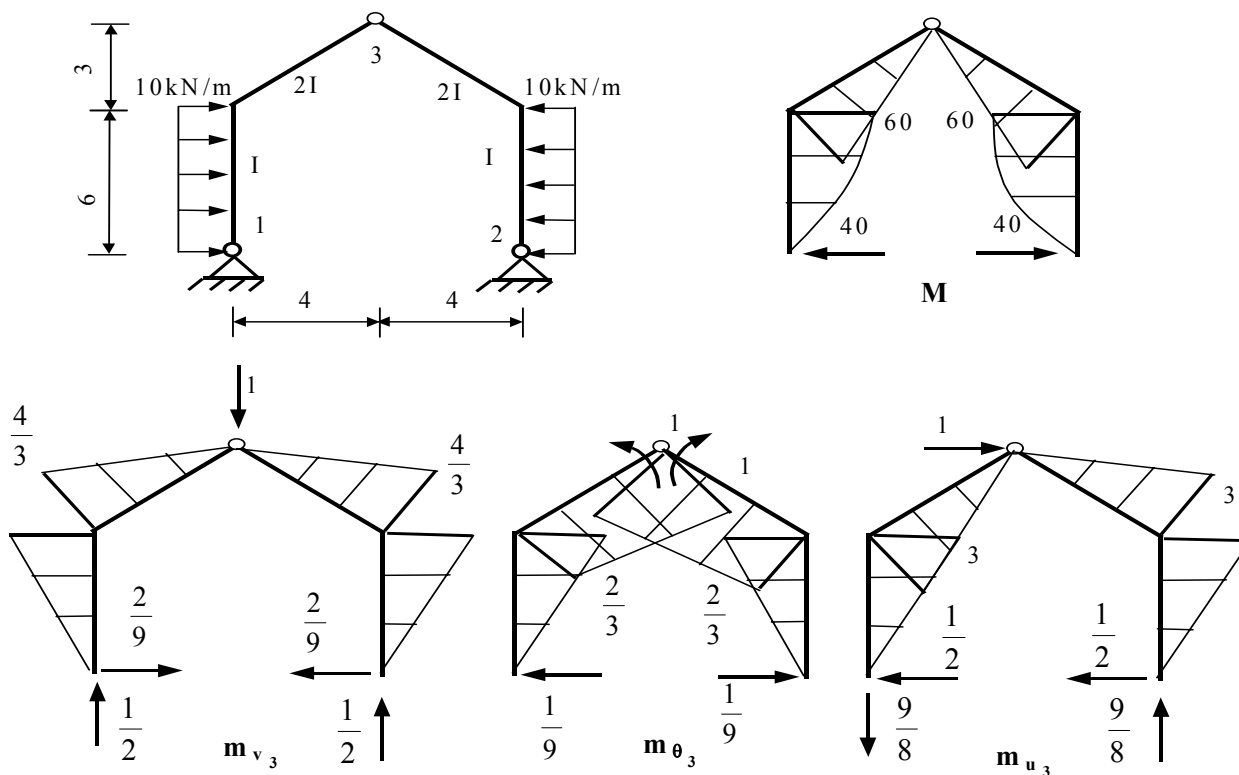
Problema 4.14 (fig.4.14) Rotirea relativă din secțiunea 3, θ_3^{rel}



-Fig.4.14 -

$$\theta_3^{\text{rel}} = \int \frac{m_{\theta_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \right] - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot 75 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot 45 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{23,196}{EI} \text{ (radiani)}$$

Problema 4.15 (fig.4.15) Translațiile v_3, u_3 și rotirea θ_3^{rel} .



-Fig.4.15 -

Încărcarea reală fiind simetrică rezultă reacțiunile și diagrama M simetrice

Calculul reacțiunilor (pentru forțele reale)

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 0; & 10 \cdot 6 \cdot 3 + V_1 \cdot 8 - 10 \cdot 6 \cdot 3 &= 0 & V_1 &= 0 \\ \sum M_1 &= 0; & 10 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 8 - 10 \cdot 6 \cdot 3 &= 0 & V_2 &= 0 \\ \sum M_3^{st} &= 0; & -10 \cdot 6 \cdot 6 + H_1 \cdot 9 &= 0; & H_1 &= 40 \text{ kN} \\ \sum M_3^{dr} &= 0; & -H_2 \cdot 9 + 10 \cdot 6 \cdot 3 &= 0; & H_2 &= 40 \text{ kN}\end{aligned}$$

Calculul deplasărilor

Translatia v_3

$$\begin{aligned}v_3 &= \int \frac{m_{v_3} M}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right] - \\ &\quad - \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right] = -\frac{693,33}{EI} \text{ (metri)}\end{aligned}$$

Rotirea relativa θ_3^{rel}

$$\begin{aligned}\theta_3^{rel} &= \int \frac{m_{\theta_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] + \\ &\quad + \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{396,66}{EI} \text{ (radiani)}\end{aligned}$$

Translatia u_3

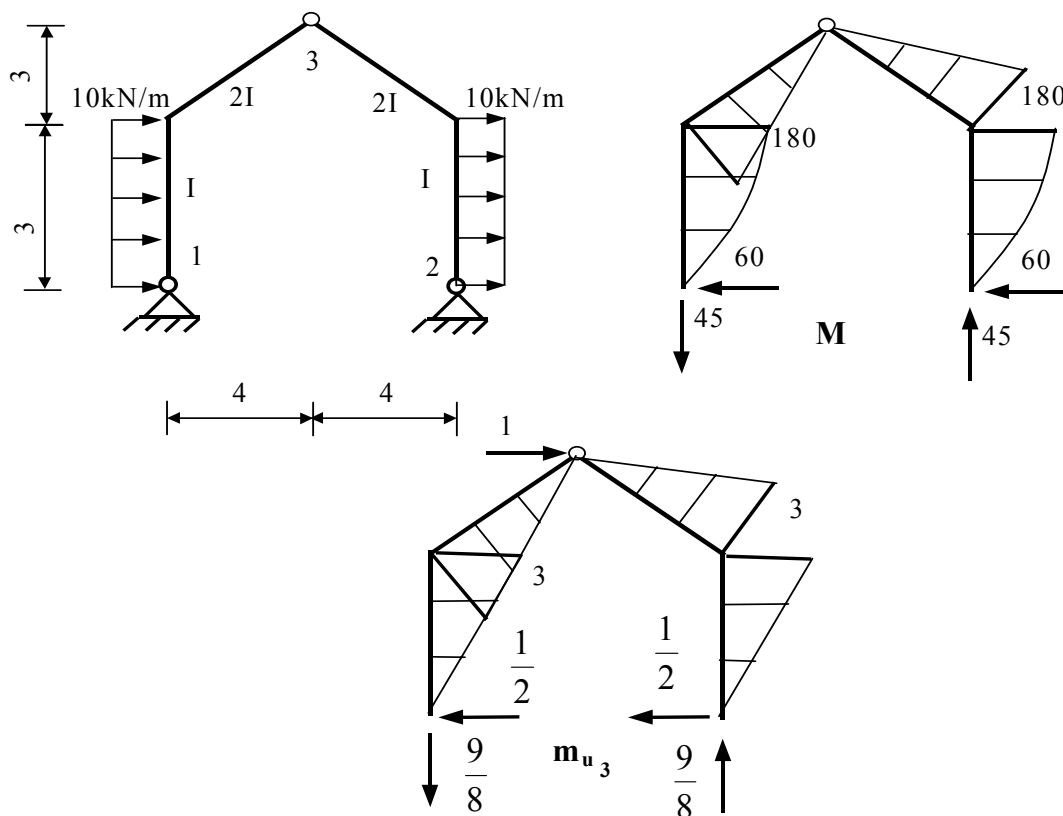
$$\begin{aligned}u_3 &= \int \frac{m_{u_3} M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = 0\end{aligned}$$

Observații

-Deoarece diagramele M, m_{v_3} și m_{θ_3} sunt simetrice, rezultatul integrării acestora este diferit de zero,

-Deoarece diagrama m_{u_3} este antisimetrică, rezultatul integrării acesteia cu diagrama M este egal cu zero.

Problema 4.16 (fig.4.16) Translațiile v_3, u_3 și rotirea θ_3^{rel} .



-Fig.4.16 -

Încărcarea fiind antisimetrică rezultă reacțiunile și diagrama M antisimetrice.

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot 3 + V_1 \cdot 8 + 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 8 = 0 \quad V_2 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 9 - 45 \cdot 4 - 10 \cdot 6 \cdot 6 = 0; \quad H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 9 - 45 \cdot 4 - 10 \cdot 6 \cdot 6 = 0; \quad H_2 = 60 \text{ kN}$$

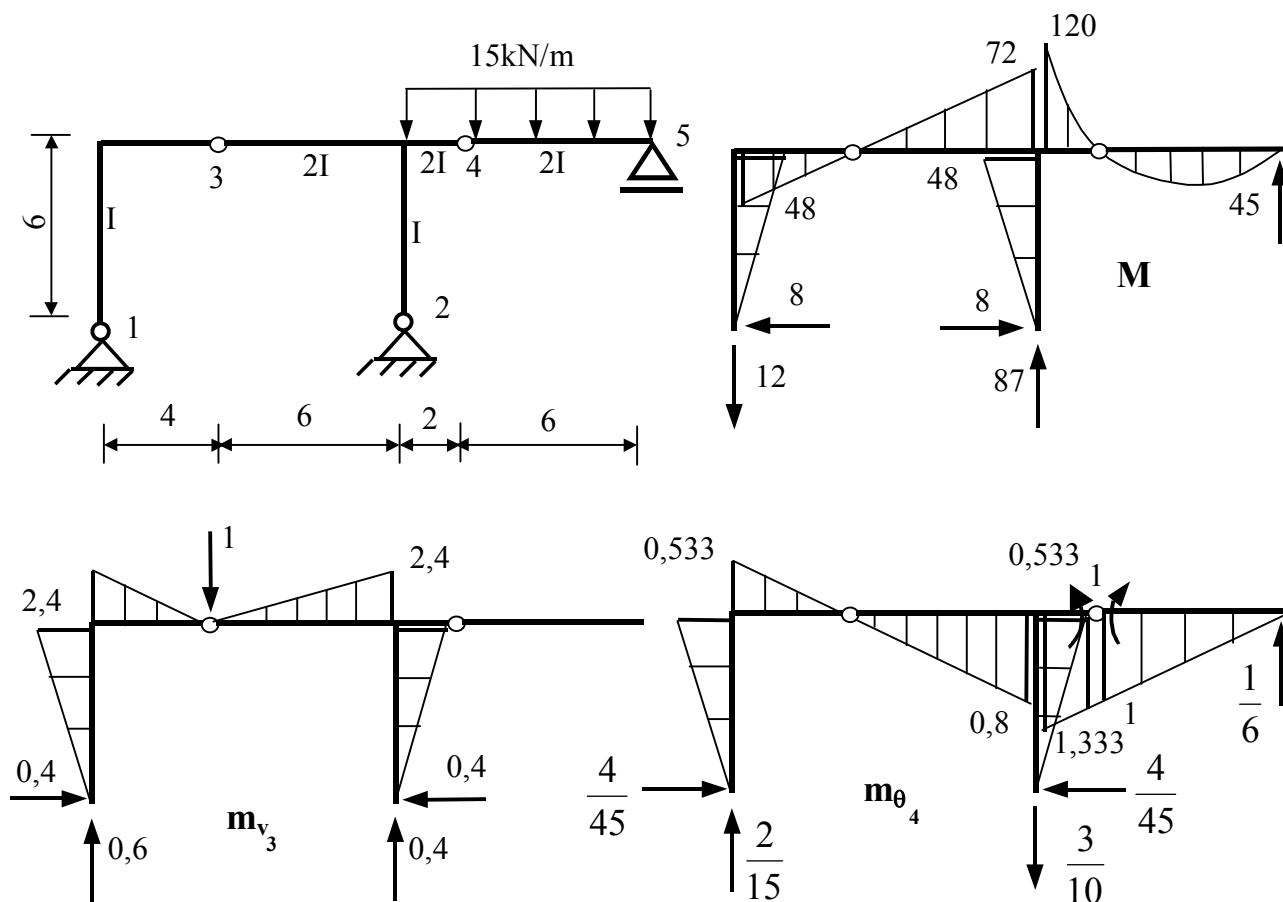
Diagramele M, m_{u_3} fiind antisimetrice, rezultatul integrării lor este diferit de zero.

Translatia u_3

$$u_3 = \int \frac{m_{u_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] + \\ + \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{3600}{EI} (\text{metri})$$

Deoarece diagramele m_{v_3} și m_{θ_3} sunt simetrice (a se vedea problema 4.15), iar diagrama M este antisimetrică rezultă $v_3 = 0$ și $\theta_3^{\text{rel}} = 0$.

Problema 4.17 (fig.4.17) Translația v_3 și rotirea relativă θ_4^{rel} .



- Fig.4.17 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum M_4^{\text{dr}} &= 0; & 15 \cdot 6 \cdot 3 - V_5 \cdot 6 &= 0; & V_5 &= 45 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= 0; & -V_1 \cdot 10 + 15 \cdot 8 \cdot 4 - 45 \cdot 6 &= 0 & V_1 &= 12 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & -V_2 \cdot 10 + 15 \cdot 8 \cdot 14 - 45 \cdot 18 &= 0 & V_2 &= 87 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{st}} &= 0; & H_1 \cdot 6 - 12 \cdot 4 &= 0; & H_1 &= 8 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{dr}} &= 0; & -87 \cdot 6 - H_2 \cdot 6 + 15 \cdot 8 \cdot 10 - 45 \cdot 14 &= 0; & H_2 &= 8 \text{ kN} \end{aligned}$$

Calculul deplasărilor

Translația v_3

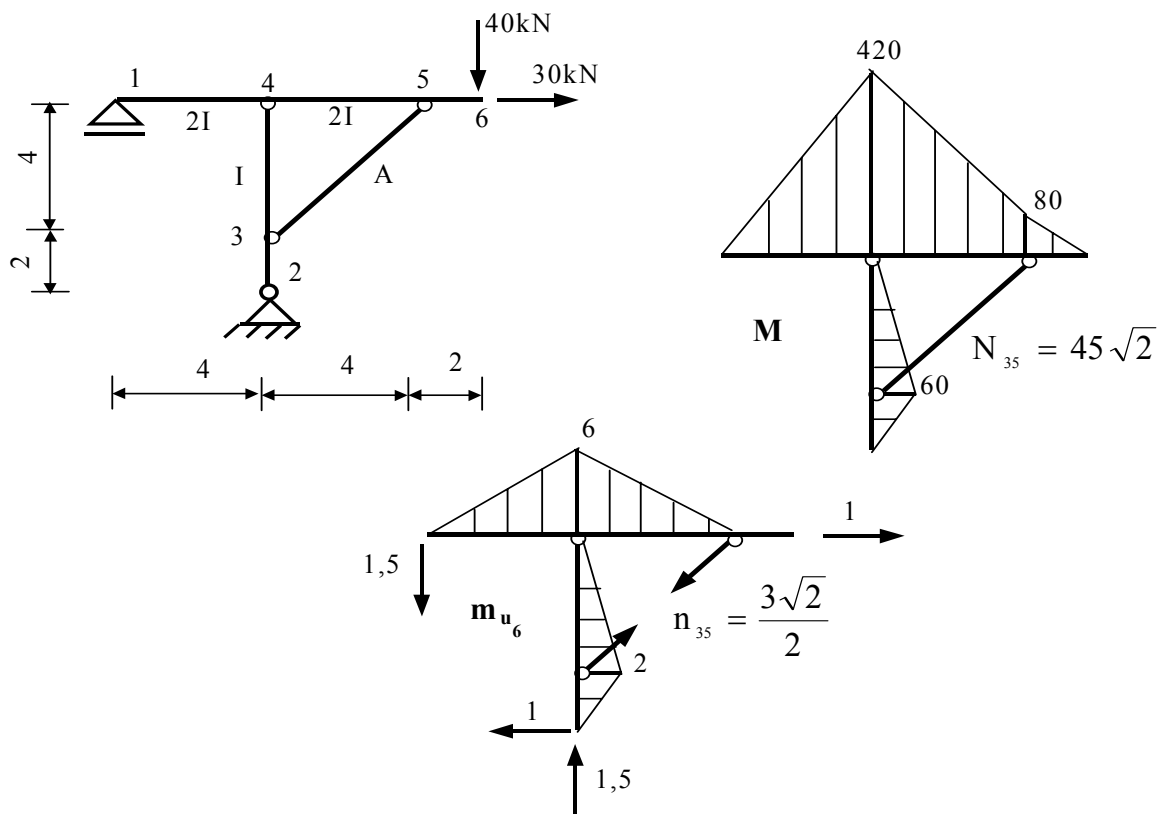
$$\begin{aligned} v_3 &= \int \frac{m_{v_3} M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 \right] + \frac{1}{2EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 \right] = \\ &= -\frac{3648}{EI} (\text{metri}) \end{aligned}$$

Deplasarea reală are loc în sens invers sensului forței egale cu unitatea.

Rotirea relativa θ_4^{rel}

$$\theta_4^{\text{rel}} = \int \frac{m_{\theta_4} M}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,533 \right] + \frac{1}{2EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,533 - \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,8 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,333 + \frac{2}{3} \cdot \frac{15 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,333 \right] = \\ = -\frac{177}{EI} \text{ (radiani)}$$

Problema 4.18 (fig.4.18) Pentru structura de la aplicația 4.5 să se calculeze translația u_6 .



- Fig.4.18 -

Calculul reacțiunilor (pentru încărcarea unitate)

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & H_2 &= 0 \\ \sum M_2 &= 0; & -V_1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 &= 0 & V_1 &= 1,5 \text{ kN} \\ \sum M_1 &= 0; & -V_2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 &= 0 & V_2 &= 1,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

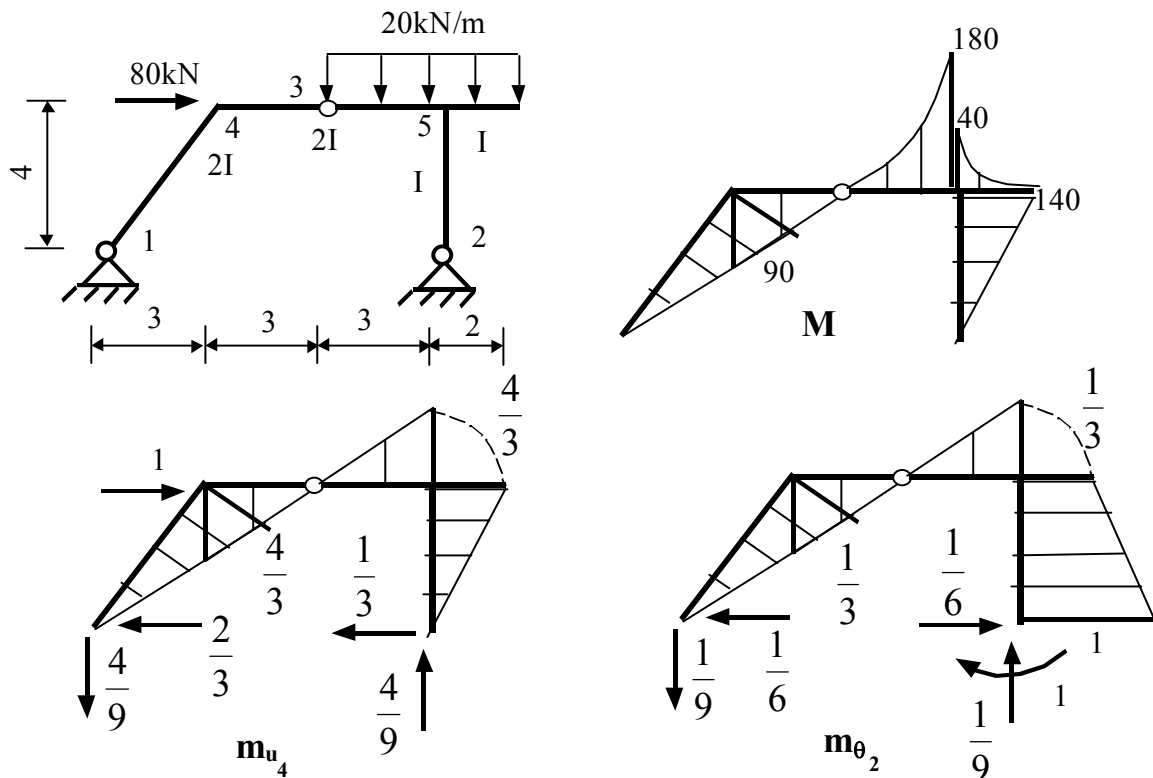
Calculul efortului din bara dublu articulată 3-5

$$\sum M_4^{\text{stalp}} = 0; \quad 1 \cdot 6 - n_{35} \cos 45^\circ \cdot 4 = 0 \quad n_{35} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ kN}$$

Deoarece în alcătuirea structurii apare și o bară dublu articulată, în calculul deplasării se va ține seama și de efectul efortului axial din această bară.

$$\begin{aligned}
 u_6 &= \int \frac{m_{u_6} M}{EI} dx + \int \frac{n_{35} N_{35}}{EA_{35}} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] + \\
 &+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 420 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 420 + \frac{1}{3} \cdot 80 \right) \right] + \frac{1}{EA} \left[4\sqrt{2} \cdot 45\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \right] = \\
 &= \frac{3760}{EI} + \frac{540\sqrt{2}}{EA} \text{ (metri)}
 \end{aligned}$$

Problema 4.19 (fig.4.19) Pentru structura de la problema 4.7 să se calculeze translația u_4 și rotirea θ_2 .



- Fig.4.19 -

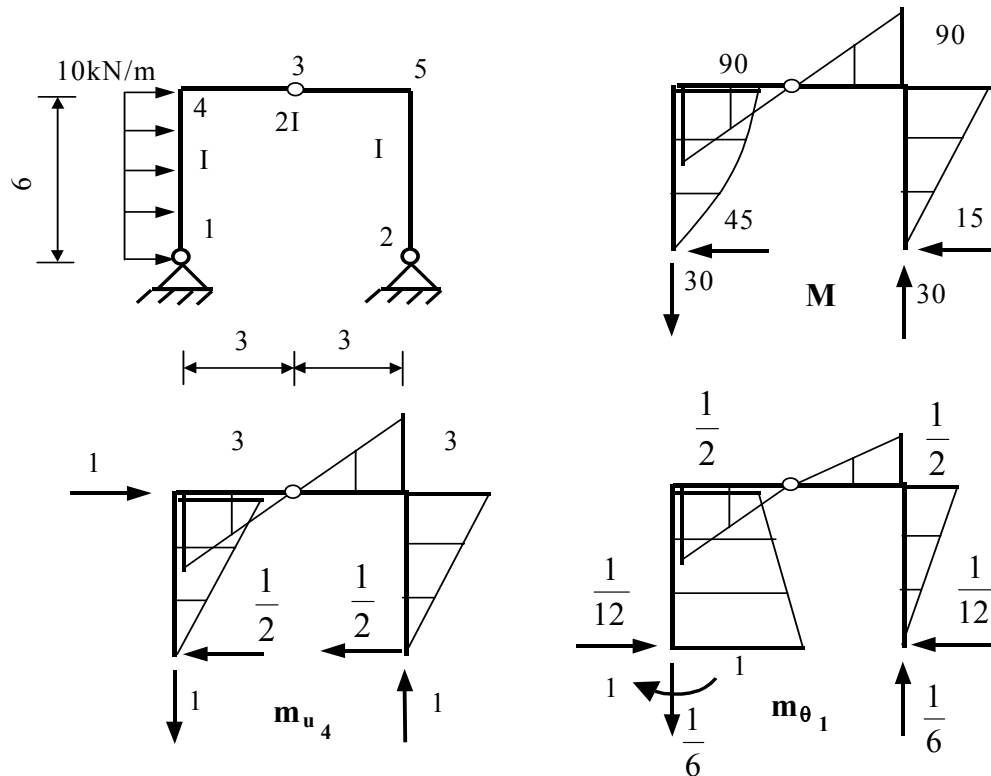
Calculul translației u_4

$$\begin{aligned}
 u_4 &= \int \frac{m_{u_4} M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 140 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right] = \frac{513,88}{EI} \text{ (metri)}
 \end{aligned}$$

Calculul rotirii θ_2

$$\theta_2 = \int \frac{m_{\theta_2} M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 140 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{128,47}{EI} \text{ (radiani)}$$

Problema 4.20 (fig. 4.20) Translația u_4 și rotirea θ_1 .



- Fig.4.20 -

Translația u_4

$$u_4 = \int \frac{m_{u_4} M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] + \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{1620}{EI} \text{ (metri)}$$

Rotirea θ_1

$$\theta_1 = \int \frac{m_{\theta_1} M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] + \frac{2}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{450}{EI} \text{ (radiani)}$$

CAPITOLUL V

GRINZI CU ZĂBRELE

Grinzile cu zăbrele plane – sau structuri articulate plane – sunt ansambluri de bare legate între ele prin noduri articulate și cu baza de susținere astfel încât să formeze structuri de rezistență, invariabile geometric și static determinate. Calculul acestor structuri are la bază ipotezele simplificatoare ale calculului liniar elastic, precum și următoarele *ipoteze specifice*:

- axele barelor sunt concurente în noduri,
- nodurile se consideră a fi articulații perfecte,
- forțele se aplică numai în noduri ca forțe concentrate.

Consecința acestor ipoteze specifice o constituie faptul că în bare apar numai eforturi axiale - de întindere sau de compresiune. Deci fiecare bară reprezintă o singură necunoscută în calculul eforturilor.

Pornind de la constatarea că figura geometrică cea mai simplă, invariabilă în plan, este triunghiul, pentru realizarea unui ansamblu cu invariabilitate geometrică proprie este necesară o succesiune de triunghiuri. Dacă ansamblul are n noduri, atunci este necesar un număr de bare

$$b = 2n - 3 \quad (V.1)$$

deoarece pentru a lega un nod de restul ansamblului sunt necesare două bare, cu excepția primelor trei noduri – care au format triunghiul de bază – pentru care au fost necesare numai trei bare (fig.V.1,a).

În cazul în care invariabilitatea geometrică se obține numai dacă se consideră și legăturile cu baza de susținere (fig.V.1,b), atunci relația (V.1) se scrie astfel

$$b + r = 2n \quad (V.2)$$

unde r reprezintă numărul de legături simple din reazeme.

Expresia (V.2) reprezintă și condiția de determinare statică deoarece $b+r$ reprezintă numărul necunoscutelor iar $2n$ numărul ecuațiilor de echilibru static ce se pot scrie pentru cele n noduri.

După modul de alcătuire, grinzile cu zăbrele se împart în următoarele categorii:

- *grinzi cu zăbrele simple*, realizate dintr-o succesiune de triunghiuri, fără ca acestea să se suprapună,
- *grinzi cu zăbrele compuse*, realizate dintr-un sistem principal peste care se suprapune unul sau mai multe sisteme secundare,
- *grinzi cu zăbrele complexe*, la care nu sunt noduri formate din două bare, ci în fiecare nod se întâlnesc trei sau mai multe bare.

Calculul grinzilor cu zăbrele constă în: calculul reacțiunilor, calculul eforturilor și calculul deplasărilor.

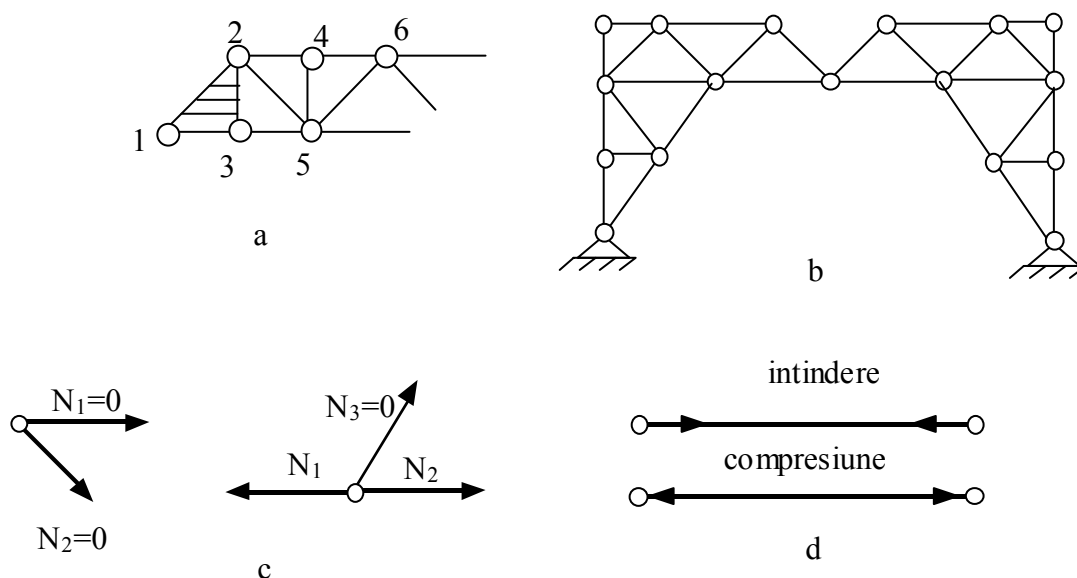
Calculul eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele se realizează cu una dintre metodele următoare:

- *Metoda izolării nodurilor*. Se utilizează în calculul eforturilor grinzilor cu zăbrele simple și compuse. Este indicat ca înainte începerii calculului eforturilor să se identifice eventualele bare de efort nul, pentru ipoteza de calcul considerată. Aceste cazuri sunt:

- nod format din două bare și neîncărcat cu forțe, eforturile din ambele bare sunt egale cu zero (fig.V.1,c);
- nod format din trei bare, dintre care două în prelungire (fig.V.1,c) și nodul nu este încărcat, efortul din bara a treia este egal cu zero.

Calculul eforturilor începe dintr-un nod format din două bare, deoarece pentru fiecare nod pot fi scrise numai două ecuații de echilibru static (ecuațiile de proiecție $\sum X_i = 0$ și $\sum Y_i = 0$). Ecuația de momente este satisfăcută pentru că forțele sunt concurente în noduri. După rezolvarea primului nod se trece la un alt nod format din două bare de efort necunoscut.

Procesul continuă, trecând din nod în nod, până la penultimul nod unde există o singură bară de efort necunoscut, iar la ultimul nod eforturile sunt cunoscute în ambele bare. Deci, ultimul nod este un nod de verificare. O greșeală pe parcurs nu este detectată decât la final și calculul trebuie reluat cu primul nod. Acesta este dezavantajul metodei.



- Fig.V.1 -

După calculul eforturilor într-un nod este bine ca natura acestora - întindere sau compresiune - să fie marcată pe structură, conform convenției din figura V.1,d.

- *Metoda secțiunilor simple*. Prin această metodă se pot determina eforturile din trei bare ale grinzii cu zăbrele, fără a fi necesară cunoașterea eforturilor din celelalte bare. Pentru aceasta se secționează trei bare, astfel încât grinda cu zăbrele să fie separată în două părți distincte și se scrie echilibrul uneia dintre părți. Având la

dispoziție trei ecuații de echilibru static se pot calcula eforturile din trei bare. Metoda poate fi utilizată atât pentru calculul eforturilor cât și pentru verificarea pe parcurs a rezultatelor obținute prin metoda izolării nodurilor.

- *Metoda dublei secțiuni*. Se utilizează pentru calculul eforturilor la grinzile cu zăbrele complexe. Se secționează prin două secțiuni un număr mai mare de bare dar se urmărește ca în ambele secțiuni să apară numai eforturile din două bare. Se scriu, de obicei, ecuații de momente astfel încât să se obțină un sistem de două ecuații cu două necunoscute. După rezolvarea acestui sistem, cu două eforturi necunoscute, se pot calcula eforturile din celelalte bare ale grinzii cu zăbrele utilizând una dintre cele două metode anterioare.

- *Metoda înlocuirii barei*. Se utilizează, de asemenea, pentru calculul eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele complexe.

Metoda constă în următoarele etape:

- se suprimă o bară din sistem și se introduce într-o nouă poziție – denumită aici bara i-j. Noua configurație trebuie să respecte condiția de invariabilitate geometrică;
- se încarcă noul sistem cu forțele reale P și se obțin eforturile N^0 , iar în bara aflată în noua poziție efortul N_{ij}^0 ;
- se încarcă noul sistem cu o pereche de forțe $X=1$, acționând pe direcția inițială a barei înlocuite și se obțin eforturile n^0 , iar în bara în discuție efortul n_{ij}^0 ;
- se impune condiția ca în bara ij efortul să fie egal cu zero, deoarece în realitate această bară nu există. Deci

$$N_{ij} = N_{ij}^0 + n_{ij}^0 \cdot X = 0 \quad (V.3)$$

de unde rezultă

$$X = -\frac{N_{ij}^0}{n_{ij}^0} \quad (V.4)$$

Necunoscuta X reprezintă efortul din bara inițială, iar eforturile în celelalte bare ale grinzii cu zăbrele se obțin prin suprapunere de efecte, printr-o relație de forma (V.3).

Calculul deplasărilor la grinzile cu zăbrele se realizează utilizând relația Maxwell-Mohr, din care se reține numai termenul ce conține efectul forțelor axiale.

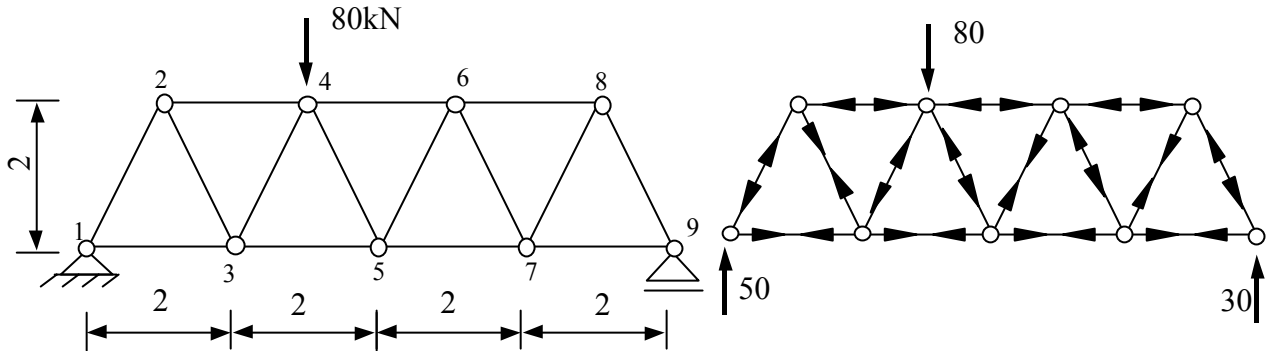
$$\Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx = \sum_1^b \frac{n_i N l}{EA} \quad (V.5)$$

Calculul se conduce într-un tabel, în care pentru fiecare bară se calculează un termen de forma (V.5). Pentru translația unui nod încărcarea unitară este o forță, iar pentru rotirea unei bare încărcarea unitară este un cuplu al cărui moment este egal cu unitatea (brațul de pârghie fiind chiar bara respectivă).

APLICAȚII

A. Să se determine eforturile din barele următoarelor grinzi cu zăbrele utilizând metoda indicată.

Problema 5.1 (fig.5.1) Metoda izolării nodurilor.



- Fig.5.1 -

Calculul reacțiunilor:

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_9 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 80 \cdot 5 = 0; \quad V_1 = 50 \text{ kN}$$

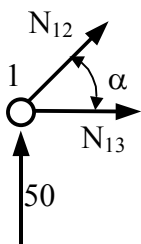
$$\sum M_1 = 0; \quad 80 \cdot 3 - V_2 \cdot 8 = 0; \quad V_2 = 30 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor în bare

Inițial eforturile necunoscute se consideră eforturi de întindere.

Nodul 1

$$\left(\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$



$$\sum Y_i = 0; \quad 50 + N_{12} \sin \alpha = 0;$$

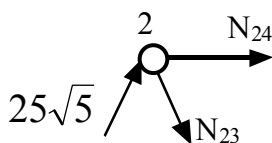
$$\sum X_i = 0; \quad N_{13} + N_{12} \cos \alpha = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{12} = -25\sqrt{5} \text{ kN (compresiune)}$$

$$N_{13} = 25 \text{ kN (întindere)}$$

Nodul 2



$$\sum Y_i = 0; \quad 25\sqrt{5} \sin \alpha - N_{23} \sin \alpha = 0;$$

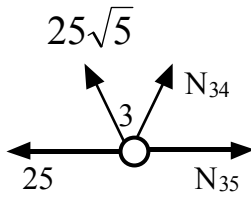
$$\sum X_i = 0; \quad 25\sqrt{5} \cos \alpha + N_{23} \cos \alpha + N_{24} = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{23} = 25\sqrt{5} \text{ kN (întindere)}$$

$$N_{24} = -50 \text{ kN (compresiune)}$$

Nodul 3



$$\sum Y_i = 0; \quad 25\sqrt{5}\sin\alpha + N_{34} \sin \alpha = 0;$$

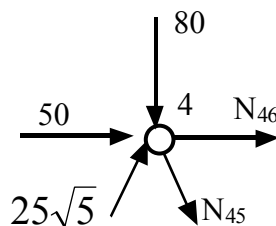
$$\sum X_i = 0; \quad -25 - 25\sqrt{5}\cos\alpha - 25\sqrt{5} \cos \alpha + N_{35} = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{34} = -25\sqrt{5}\text{kN (compresiune)}$$

$$N_{35} = 75\text{kN (întindere)}$$

Nodul 4



$$\sum Y_i = 0; \quad 25\sqrt{5}\sin\alpha - 80 - N_{45} \sin \alpha = 0;$$

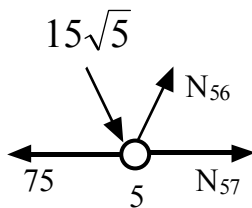
$$\sum X_i = 0; \quad 50 + 25\sqrt{5}\cos\alpha - 15\sqrt{5} \cos \alpha + N_{46} = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{45} = -15\sqrt{5}\text{kN (compresiune)}$$

$$N_{46} = -60\text{kN (compresiune)}$$

Nodul 5



$$\sum X_i = 0; \quad -75 + 15\sqrt{5}\cos\alpha + N_{56} \cos \alpha + N_{57} = 0;$$

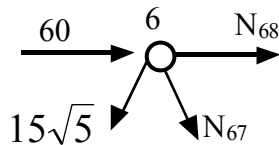
$$\sum Y_i = 0; \quad -15\sqrt{5}\sin\alpha + N_{56} \sin \alpha = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{56} = 15\sqrt{5}\text{kN (întindere)}$$

$$N_{57} = 45\text{kN (întindere)}$$

Nodul 6



$$\sum Y_i = 0; \quad -15\sqrt{5}\sin\alpha - N_{67} \sin \alpha = 0;$$

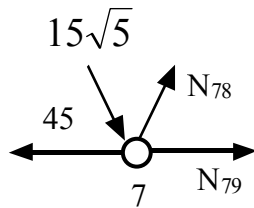
$$\sum X_i = 0; \quad 60 - 15\sqrt{5}\cos\alpha - 15\sqrt{5} \cos \alpha + N_{68} = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{67} = -15\sqrt{5}\text{kN (compresiune)}$$

$$N_{68} = -30\text{kN (compresiune)}$$

Nodul 7



$$\sum Y_i = 0; \quad -15\sqrt{5}\sin\alpha + N_{78} \sin\alpha = 0;$$

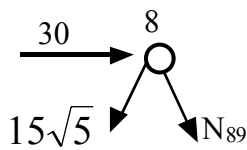
$$\sum X_i = 0; \quad -45 + 15\sqrt{5}\cos\alpha + 15\sqrt{5}\cos\alpha + N_{79} = 0;$$

de unde rezultă

$$N_{78} = 15\sqrt{5}\text{kN (întindere)}$$

$$N_{79} = 15\text{kN (întindere)}$$

Nodul 8



În acest nod există o singură bară de efort necunoscut

$$\sum Y_i = 0; \quad -15\sqrt{5}\sin\alpha - N_{89} \sin\alpha = 0;$$

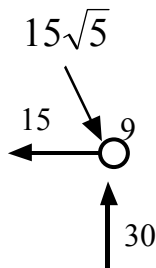
$$N_{89} = -15\sqrt{5}\text{kN (compresiune)}$$

$$\sum X_i = 0; \quad \text{Aceasta este o prima relație de verificare}$$

$$30 - 15\sqrt{5}\cos\alpha - 15\sqrt{5}\cos\alpha = 0; \quad 30 - 15 - 15 = 0$$

Calcul corect

Nodul 9



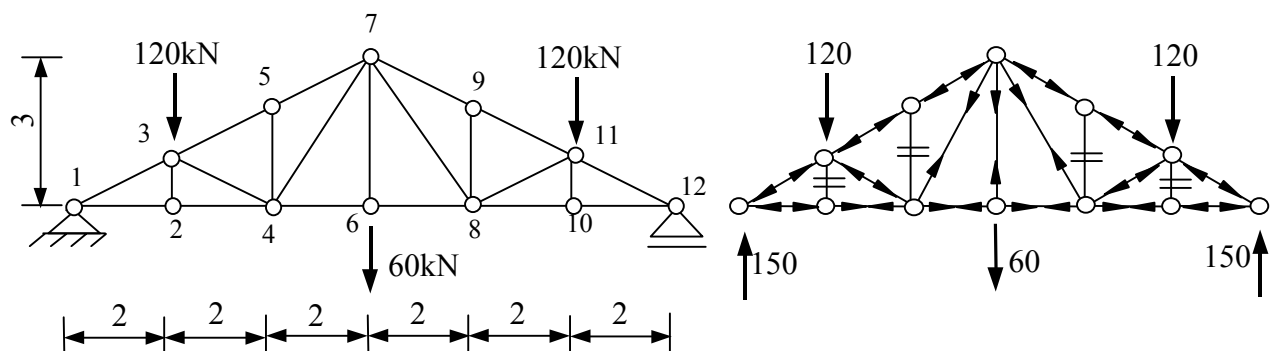
Este nod de verificare

$$\sum X_i = 0; \quad -15 + 15\sqrt{5}\cos\alpha = 0; \quad -15 + 15 = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -15\sqrt{5}\sin\alpha + 30 = 0; \quad -30 + 30 = 0$$

Calculul a fost efectuat corect.

Problema 5.2 (fig.5.2) Metoda izolării nodurilor



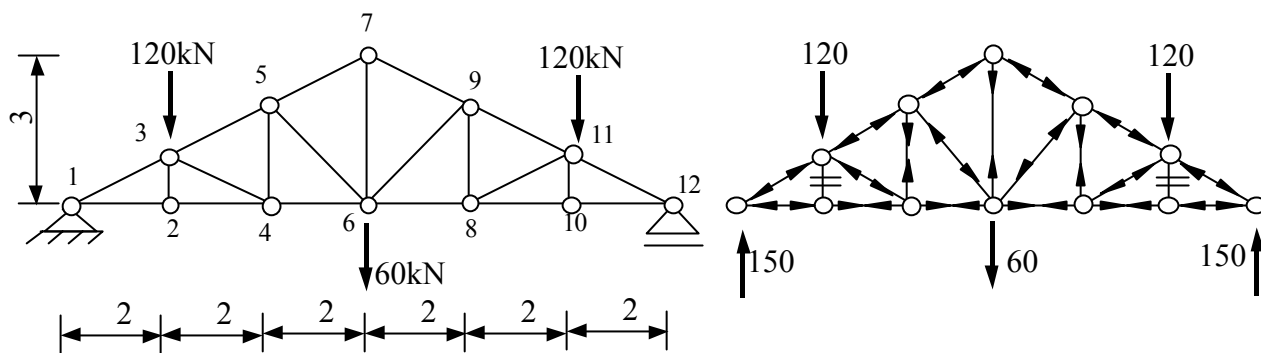
- Fig.5.2 -

Grinda cu zăbrele este simetrică și încărcată simetric, deci reacțiunile și eforturile vor fi simetrice. Eforturile sunt date în tabelul 5.2

Tabelul 5.2

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5
Efortul	+300,0	-335,41	0	+300,0	-134,16	-201,25	0
Bara	4-6	4-7	5-7	6-7	6-8	7-8	7-9
Efortul	+140,0	+72,11	-201,25	+60,0	+140,0	+72,11	-201,25
Bara	8-9	8-10	8-11	9-11	10-11	10-12	11-12
Efortul	0	+300,0	-134,16	-201,25	0	+300,0	-335,41

Problema 5.3 (fig.5.3) Aceeași structură de la problema 5.2 la care se schimbă poziția a două bare.



- Fig.5.3 -

Eforturile sunt date în tabelul 5.3

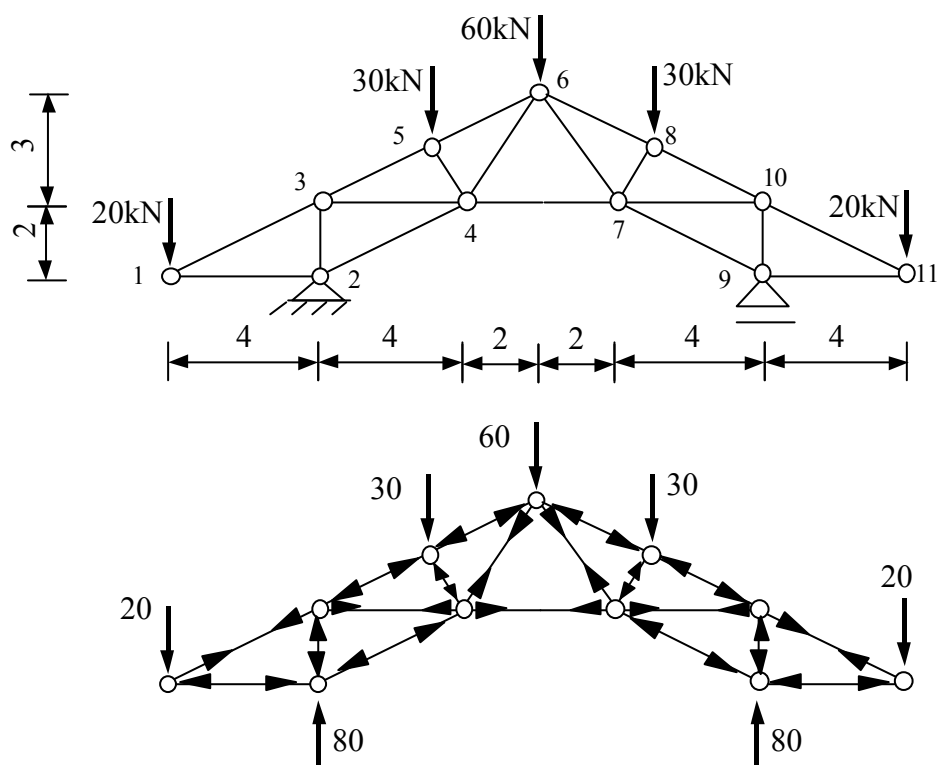
Tabelul 5.3

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5
Efortul	+300,0	-335,41	0	+300,0	-134,16	-201,25	+60,0
Bara	4-6	5-6	5-7	6-7	6-8	6-9	7-9
Efortul	+180,0	-56,57	-156,53	+140,0	+180,0	-56,57	-156,53
Bara	8-9	8-10	8-11	9-11	10-11	10-12	11-12
Efortul	+60,0	+300,0	-134,16	-201,25	0	+300,0	-335,41

În acest caz de distribuție a barelor se constată următoarele:

- numai două bare sunt de efort nul,
- în bara 6-7 apare efort de întindere de 140kN în loc de 60kN, cum era în cazul anterior,
- cresc eforturile de întindere din barele 4-6 și 6-8 de la 140kN la 180kN,
- scade efortul de compresiune din barele 5-7 și 7-9 de la 201,25kN la 156,53kN.

Problema 5.4 (fig.5.4) Metoda izolării nodurilor.



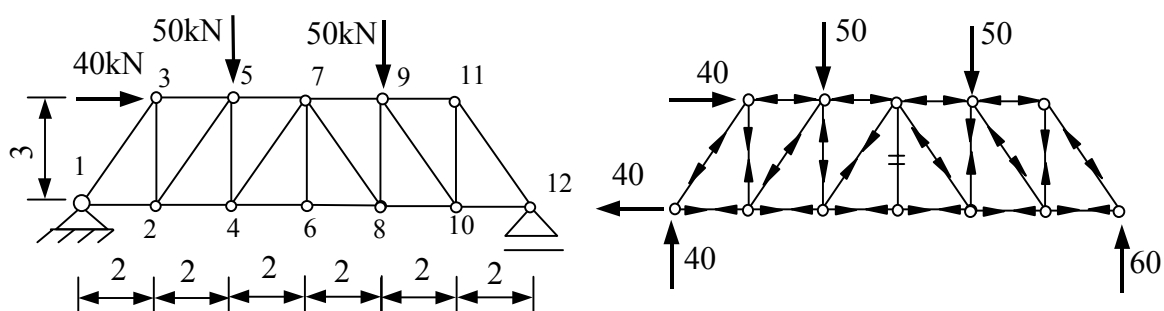
- Fig.5.4 -

Eforturile sunt date in tabelul 5.4

Tabelul 5.4

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5
Efortul	-40,0	+44,72	-60,0	-44,72	+120,0	-89,44	-27,04
Bara	4-6	4-7	5-6	6-7	6-8	7-8	7-9
Efortul	+3,0	+63,33	-72,67	+3,0	-72,67	-27,04	-44,72
Bara	7-10	8-10	9-10	9-11	10-11		
Efortul	+120,0	-89,44	-60,0	-40,0	+44,72		

Problema 5.5 (fig.5.5) Metoda izolării nodurilor.



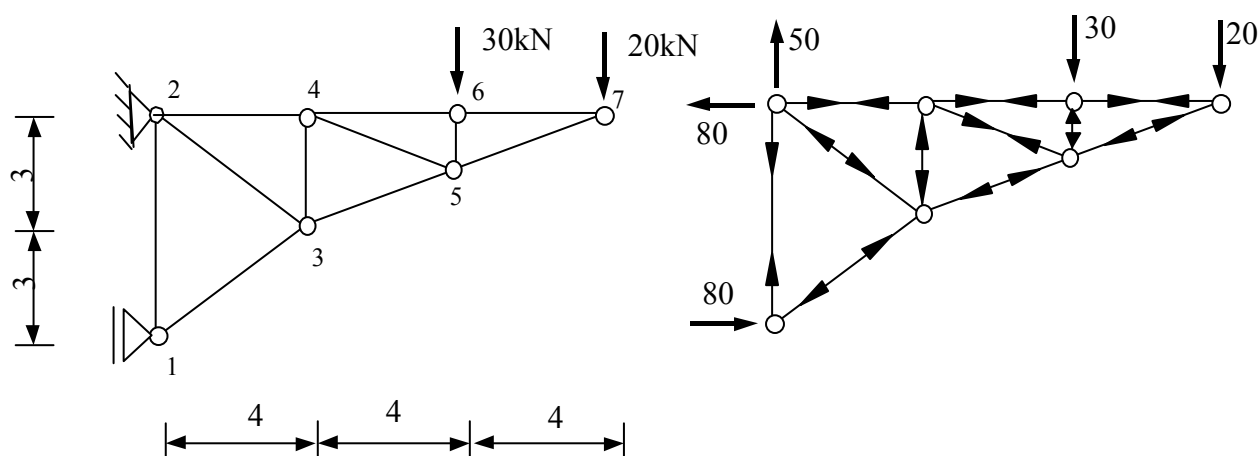
-Fig.5.5 -

Eforturile sunt date in tabelul 5.5

Tabelul 5.5

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	2-5	3-5	4-5
Efortul	+66,67	-48,07	+40,0	+93,33	-48,07	-66,67	-10,0
Bara	4-6	4-7	5-7	6-7	6-8	7-8	7-9
Efortul	+86,67	+12,02	-93,33	0	+86,67	-12,02	-80,0
Bara	8-9	8-10	9-10	9-11	10-11	10-12	11-12
Efortul	+10,0	+80,0	-72,11	-40,0	+60,0	+40,0	-72,11

Problema 5.6 (fig.5.6) Metoda izolării nodurilor.



- Fig.5.6 -

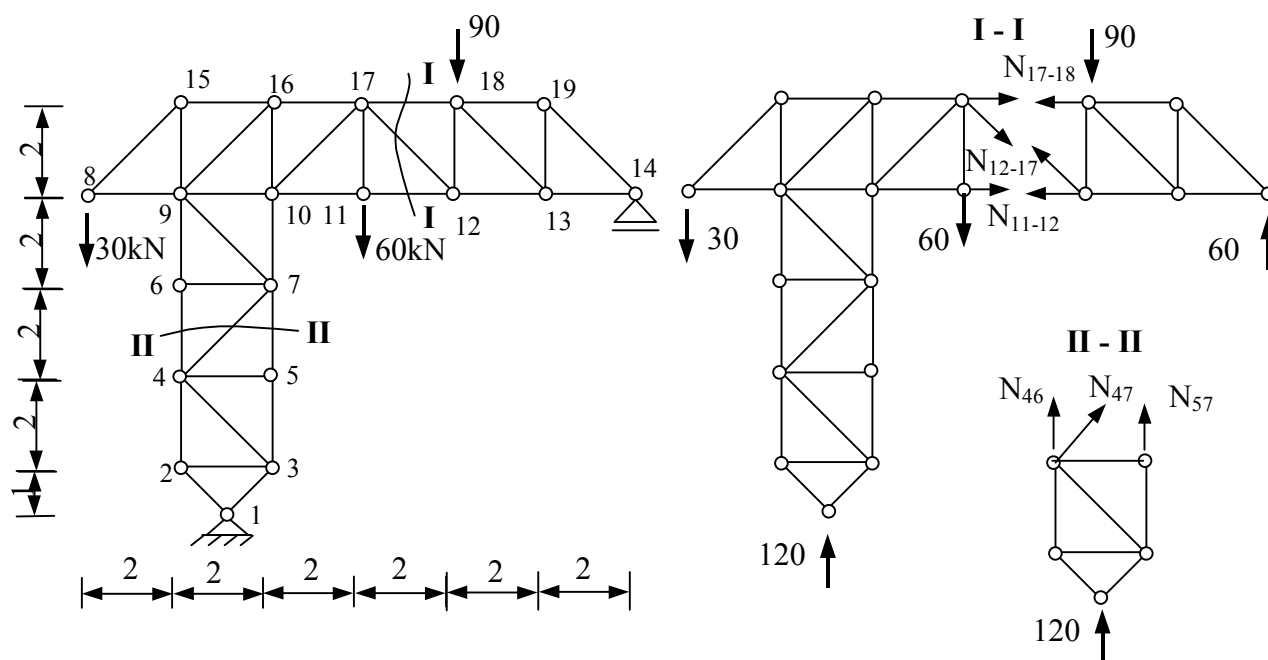
Eforturile sunt date in tabelul 5.6

Tabelul 5.6

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5
Efortul	+60,0	-100,0	-16,67	+93,34	-15,0	-99,68
Bara	4-5	4-6	5-6	5-7	6-7	
Efortul	+42,72	+53,34	-30,0	-59,96	+53,34	

Grinda cu zăbrele fiind o consolă, calculul eforturilor se poate începe prin izolarea nodului 7.

Problema 5.7 (fig.5.7) Metoda secțiunilor simple



- Fig.5.7 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{array}{lll} \sum X_i = 0; & H_1 = 0 & \\ \sum M_1 = 0; & -30 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 90 \cdot 5 - V_{14} \cdot 9 = 0; & V_{14} = 60 \text{ kN} \\ \sum M_{14} = 0; & -30 \cdot 12 + V_1 \cdot 9 - 60 \cdot 6 - 90 \cdot 4 = 0; & V_1 = 120 \text{ kN} \end{array}$$

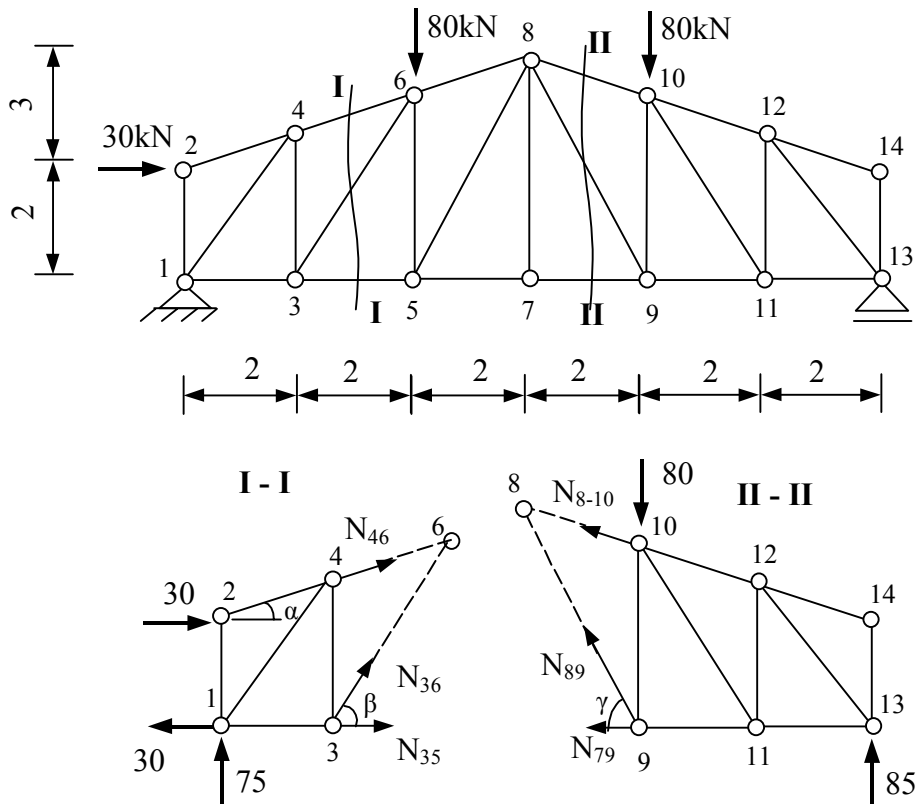
Eforturile din secțiunea I-I. Se scrie echilibrul părții din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum M_{17} &= 0; & N_{11-12} \cdot 2 + 90 \cdot 2 - 60 \cdot 6 &= 0; & N_{11-12} &= 90 \text{ kN} \\ \sum M_{12} &= 0; & -N_{17-18} \cdot 2 - 60 \cdot 4 &= 0; & N_{17-18} &= -120 \text{ kN} \\ \sum Y_i &= 0; & N_{12-17} \cos 45^\circ - 90 + 60 &= 0; & N_{12-17} &= 30\sqrt{2} \text{ kN} \end{aligned}$$

Eforturile din secțiunea II-II. Se scrie echilibrul părții inferioare a grinzii cu zăbrele.

$$\begin{array}{lll} \sum M_7 = 0; & N_{46} \cdot 2 + 120 \cdot 1 = 0; & N_{46} = -60 \text{ kN} \\ \sum M_4 = 0; & -120 \cdot 1 - N_{57} \cdot 2 = 0; & N_{57} = -60 \text{ kN} \\ \sum X_i = 0; & N_{47} \cos 45^\circ = 0; & N_{47} = 0 \end{array}$$

Problema 5.8 (fig.5.8) Metoda secțiunilor simple



- Fig.5.8 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & 30 - H_1 &= 0; & H_1 &= 30\text{kN} \\ \sum M_1 &= 0; & 30 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 80 \cdot 8 - V_{13} \cdot 12 &= 0; & V_{13} &= 85\text{kN} \\ \sum M_{13} &= 0; & V_1 \cdot 12 + 30 \cdot 2 - 80 \cdot 8 + 80 \cdot 4 &= 0; & V_1 &= 75\text{kN} \end{aligned}$$

Secțiunea I-I. Se scrie echilibrul părții din stânga.

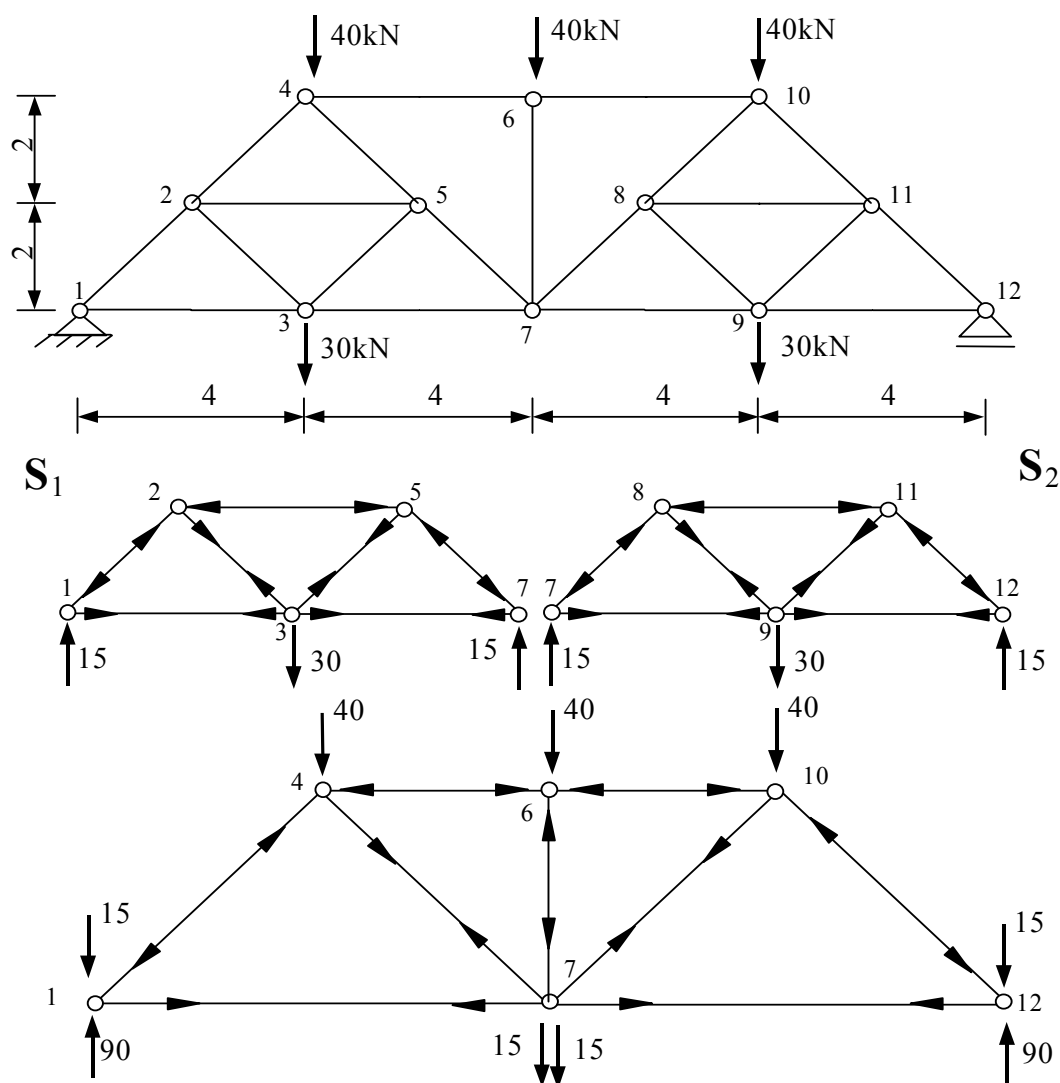
$$\begin{aligned} \sum M_6 &= 0; & 30 \cdot 4 - 30 \cdot 2 + 75 \cdot 4 - N_{35} \cdot 4 &= 0; & N_{35} &= 90\text{kN} \\ \sum M_3 &= 0; & 30 \cdot 2 + 75 \cdot 2 + N_{46} \cos \alpha \cdot 3 &= 0; & N_{46} &= -78,26\text{kN} \\ \sum X_i &= 0; & 30 - 30 + N_{35} + N_{46} \cos \alpha + N_{36} \cos \beta &= 0; & N_{36} &= -44,72\text{kN} \end{aligned}$$

Secțiunea II-II. Se scrie echilibrul părții din dreapta.

$$\begin{aligned} \sum M_8 &= 0; & N_{79} \cdot 5 + 80 \cdot 2 - 85 \cdot 6 &= 0; & N_{79} &= 70\text{kN} \\ \sum M_9 &= 0; & -N_{8-10} \cos \alpha \cdot 4 - 85 \cdot 4 &= 0; & N_{8-10} &= -95,03\text{kN} \\ \sum X_i &= 0; & -N_{79} - N_{89} \cos \gamma - N_{8-10} \cos \alpha &= 0; & N_{89} &= 40,39\text{kN} \end{aligned}$$

Problema 5.9 (fig.5.9) Grinda cu zăbrele este o grindă compusă.

Se calculează eforturile separat pentru părțile secundare și separat pentru partea principală și apoi se suprapun efectele pentru barele comune. Calculul se efectuează cu metoda izolării nodurilor sau metoda secțiunilor simple.



- Fig.5.9 -

Eforturile din barele sistemelor secundare S_1 și S_2 sunt date în tabelul 5.9,a.

Tabelul 5.9,a

S1	Bara	1-2	1-3	2-3	2-5	3-5	3-7	5-7
	Efortul	$-15\sqrt{2}$	$+15$	$+15\sqrt{2}$	-30	$+15\sqrt{2}$	$+15$	$-15\sqrt{2}$
S2	Bara	7-8	7-9	8-9	8-11	9-11	9-12	11-12
	Efortul	$-15\sqrt{2}$	$+15$	$+15\sqrt{2}$	-30	$+15\sqrt{2}$	$+15$	$-15\sqrt{2}$

Eforturile din sistemul principal sunt date în tabelul 5.9,b.

Tabelul 5.9,b

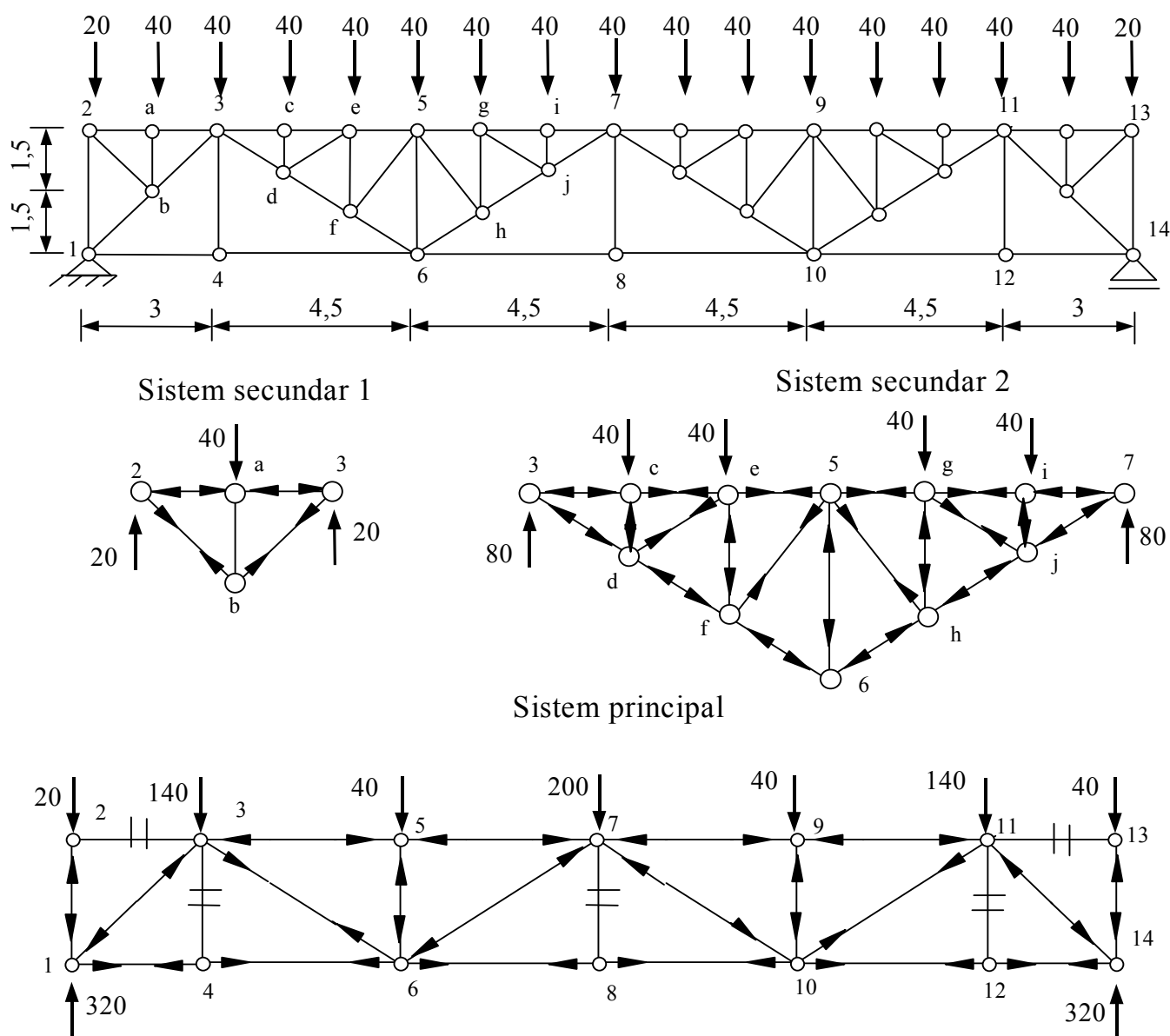
Bara	1-4	1-7	4-6	4-7	6-7	6-10	7-10	7-12	10-12
Efortul	$-75\sqrt{2}$	$+75$	$+110$	$+35\sqrt{2}$	-40	$+110$	$+35\sqrt{2}$	$+75$	$-75\sqrt{2}$

Eforturile în barele grinzii cu zăbrele reale sunt date în tabelul 5.9,c.

Tabelul 5.9,c

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	2-5	3-5	3-7
Efortul	$-90\sqrt{2}$	$+90$	$+15\sqrt{2}$	$-75\sqrt{2}$	-30	$+15\sqrt{2}$	$+90$
Bara	4-5	4-6	5-7	6-7	6-10	7-8	7-9
Efortul	$+35\sqrt{2}$	$+110$	$+20\sqrt{2}$	-40	$+110$	$+20\sqrt{2}$	$+90$
Bara	8-9	8-10	8-11	9-11	9-12	10-11	11-12
Efortul	$+15\sqrt{2}$	$+35\sqrt{2}$	-30	$+15\sqrt{2}$	$+90$	$-75\sqrt{2}$	$-90\sqrt{2}$

Problema 5.10 (fig.5.10)



- Fig.5.10 -

Sistemul secundar 1

$$N_{2b} = 20\sqrt{2}\text{kN}; N_{2a} = -20\text{kN}; N_{ab} = -40\text{kN}; N_{a3} = -20\text{kN}; N_{b3} = 20\sqrt{2}\text{kN}$$

Sistemul secundar 2. Eforturile sunt date în tabelul 5.10,a

Tabelul 5.10,a

Bara	4-c	4-d	c-d	c-e	d-e	d-f	e-f
Efortul	-120,0	144,22	-40,0	-120,0	36,06	108,17	-60,0
Bara	e-5	f-5	f-6	5-6	5-g	5-h	6-h
Efortul	-90,0	50,0	72,11	-80,0	-90,0	50,0	72,11
Bara	g-h	g-i	g-j	h-j	i-j	i-7	j-7
Efortul	-60,0	-120,0	36,06	108,17	-40,0	-120,0	142,22

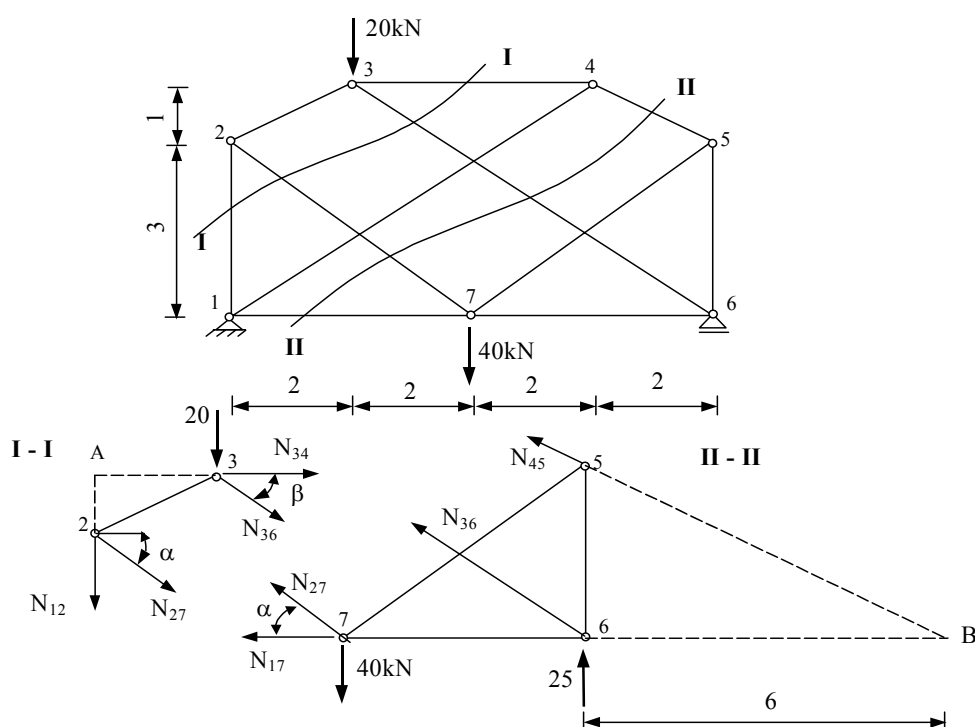
Eforturile din sistemul principal sunt date în tabelul 5.10,b numai pentru jumătate de structură deoarece încărcarea este simetrică.

Tabelul 5.10,b

Bara	1-2	1-3	1-4	2-3	3-4	3-5	3-6
Efortul	-40,0	-395,98	280,0	0	0	-490,0	252,39
Bara	4-6	5-6	5-7	6-7	6-8	7-8	
Efortul	280,0	-40,0	-490,0	-180,28	640,0	0	

Eforturile din sistemul real se obțin prin suprapunerea eforturilor obținute în sistemele secundare și sistemul principal, acolo unde cele două sisteme se suprapun.
De exemplu: $N_{2a} = -20\text{kN}$; $N_{a3} = -20\text{kN}$; $N_{b4} = -367,70\text{kN}$; $N_{4c} = -610\text{kN}$.

Problema 5.11 (fig.5.11) Metoda dublei secțiuni



- Fig.5.11 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_6 = 0; \quad V_1 \cdot 8 - 20 \cdot 6 - 40 \cdot 4 = 0 \quad V_1 = 35 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 2 + 40 \cdot 4 - V_6 \cdot 8 = 0 \quad V_6 = 25 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

Secțiunile au fost practicate astfel încât în ambele să se afle două bare și anume barele 2-7 și 3-6.

Pentru partea din stânga a secțiunii I-I scriind o ecuație de momente în raport cu punctul A se obține:

$$\sum M_A = 0; \quad -N_{27} \cos \alpha \cdot 1 + 20 \cdot 2 - N_{36} \sin \beta \cdot 2 = 0$$

Pentru partea din dreapta a secțiunii II-II scriind o ecuație de momente în raport cu punctul B se obține:

$$\sum M_B = 0; \quad N_{27} \sin \alpha \cdot 10 - 40 \cdot 10 + 25 \cdot 6 + N_{36} \sin \beta \cdot 6 = 0$$

Rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute se obțin eforturile în barele 2-7 și 3-6 : $N_{27} = 44 \text{ kN}$ și $N_{36} = -4,29 \text{ kN}$.

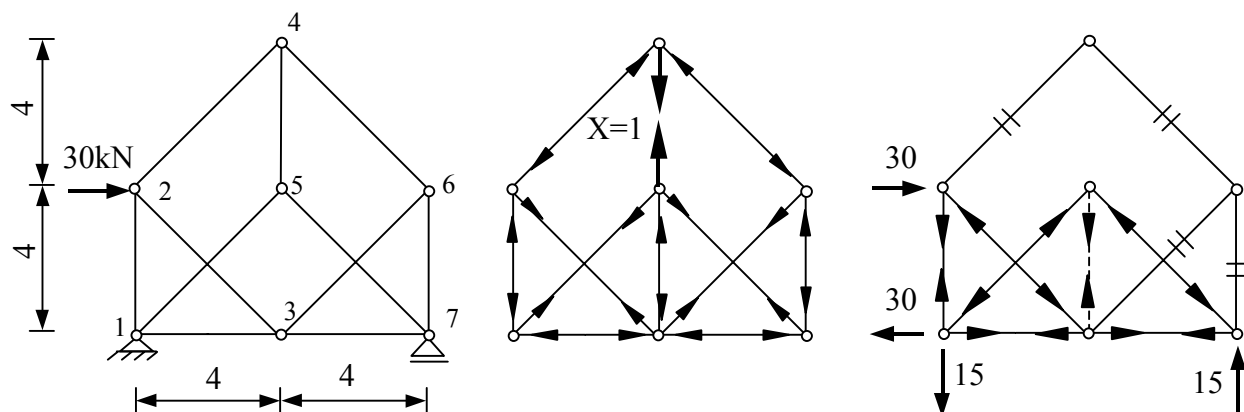
Celelalte eforturi se determină utilizând metoda izolării nodurilor și au valorile:

$$N_{57} = 22,60 \text{ kN}; \quad N_{17} = -13,60 \text{ kN}; \quad N_{12} = -44,0 \text{ kN}; \quad N_{23} = -39,35 \text{ kN};$$

$$N_{34} = -31,70 \text{ kN}; \quad N_{67} = 3,57 \text{ kN}; \quad N_{56} = -12,6 \text{ kN}; \quad N_{45} = -20,21 \text{ N};$$

$$N_{14} = 16,22 \text{ kN}.$$

Problema 5.12 (fig.5.12) Metoda înlocuirii barei.



- Fig. 5.12 -

Bara 4-5 se mută în poziția 3-5. Noua structură se încarcă cu perechea de forțe $X=1$ și se obțin eforturile n_{ij}^0 și apoi cu forța reală și se obțin eforturile N_{ij}^0 .

Punând condiția ca efortul în bara 3-5 să fie egal cu zero rezultă:

$$N_{35} = N_{35}^0 + n_{35}^0 \cdot X = 0$$

de unde

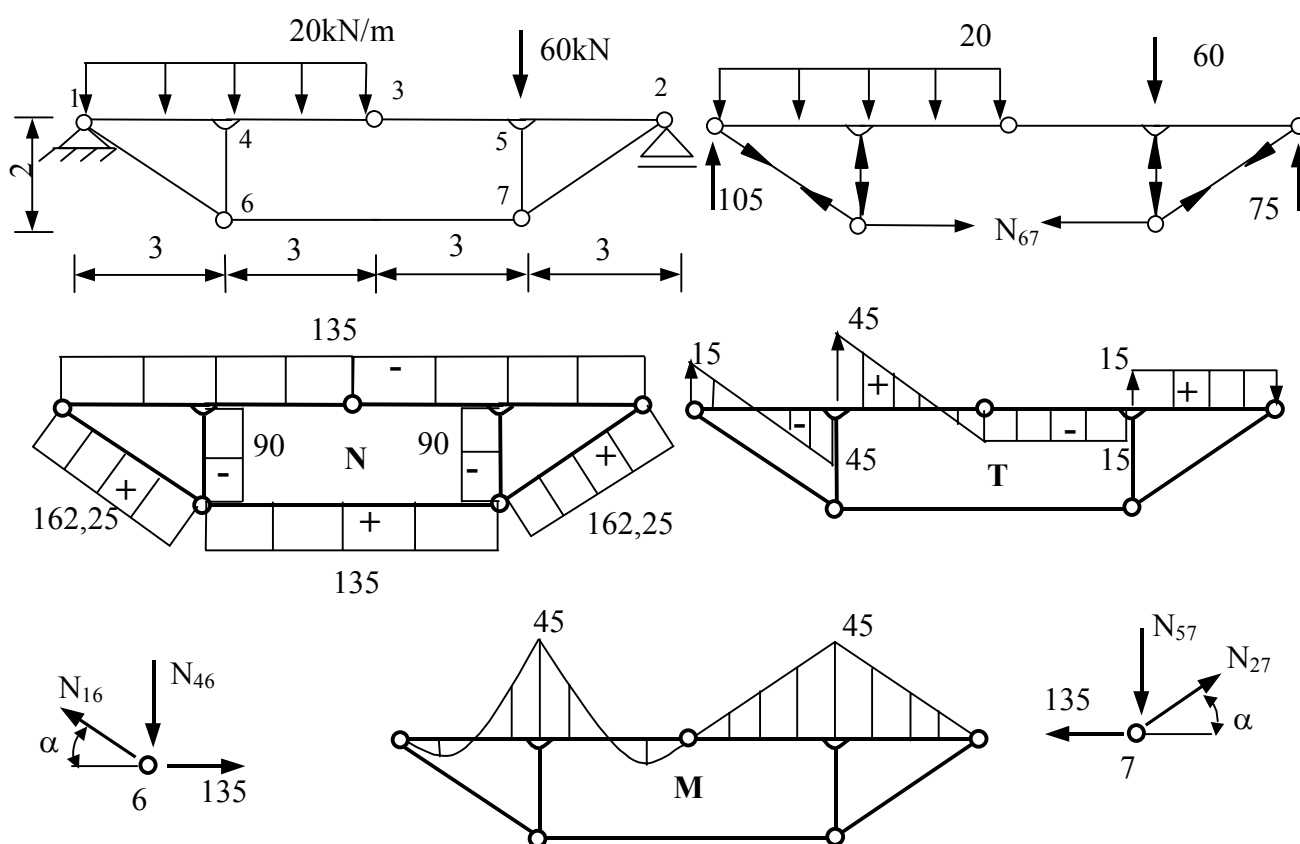
$$X = -\frac{N_{35}^0}{n_{35}^0} = 30 \text{ kN}$$

Cunoscând X se determină și celelalte eforturi prin suprapunere de efecte, așa cum se prezintă în tabelul 5.12.

Tabelul 5.12

Bara	n_{ij}^0	N_{ij}^0	N_{ij}
1-2	-1	+30	0
1-5	$+\sqrt{2}$	$-15\sqrt{2}$	$+15\sqrt{2}$
1-3	-1	+45	+15
2-4	$-0,5\sqrt{2}$	0	$-15\sqrt{2}$
2-3	$+0,5\sqrt{2}$	$-30\sqrt{2}$	0
3-5	-1	+30	0
3-7	-1	+15	-15
3-6	$+0,5\sqrt{2}$	0	$+15\sqrt{2}$
5-7	$+\sqrt{2}$	$-15\sqrt{2}$	$+15\sqrt{2}$
4-5	+1	0	+30
4-6	$-0,5\sqrt{2}$	0	$-15\sqrt{2}$
6-7	-1	0	-30

Problema 5.13 (fig.5.13)



-Fig.5.13 -

Această structură este o structură mixtă, având bare solicitate la încovoiere și bare solicitate numai axial. Reacțiunile se determină din condițiile de echilibru al ansamblului. Pentru calculul eforturilor din barele dublu articulate se determină mai întâi, din condiție de moment zero în raport cu articulația 3, efortul N_{67} . Celelalte eforturi se obțin din echilibrul nodurilor 6 și 7.

Calculul reacțiunilor

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 12 - 20 \cdot 6 \cdot 9 - 60 \cdot 3 = 0 \quad V_1 = 105 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 + 60 \cdot 9 - V_2 \cdot 12 = 0 \quad V_2 = 75 \text{ kN}$$

Efortul din bara 6-7

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad N_{67} \cdot 2 + 60 \cdot 3 - 75 \cdot 6 = 0 \quad N_{67} = 135 \text{ kN}$$

Nodul 6

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sum X_i = 0; \quad N_{16} \cdot \cos \alpha - 135 = 0 \quad N_{16} = 162,25 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad 162,25 \cdot \sin \alpha - N_{46} = 0 \quad N_{46} = 90 \text{ kN}$$

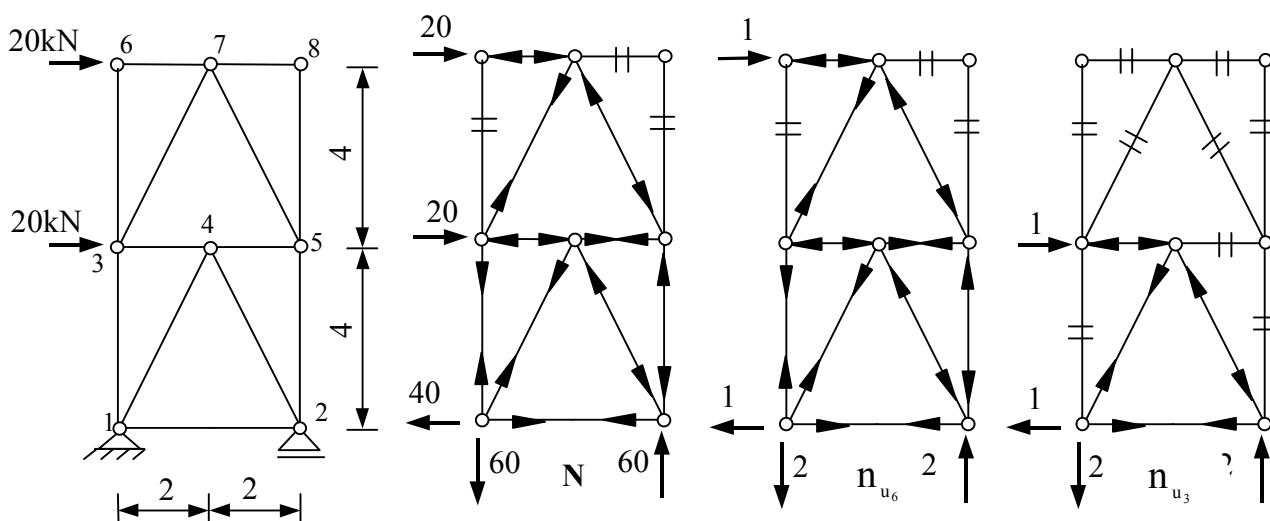
Nodul 7

$$\sum X_i = 0; \quad 135 + N_{27} \cdot \cos \alpha = 0 \quad N_{27} = 162,25 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad 162,25 \cdot \sin \alpha - N_{57} = 0 \quad N_{57} = 90 \text{ kN}$$

B. Să se calculeze deplasările indicate la următoarele grinzi cu zăbrele

Problema 5.14 (fig.5.14) Translația pe orizontală a nodurilor 6 și 3. Barele verticale și cele înclinate au aria secțiunii transversale egală cu $2A$ iar celelalte bare au aria egală cu A .



- Fig.5.14 -

Calculul se organizează în tabelul 5.14, iar deplasările se calculează cu relația

$$\Delta_i = \sum_1^b \frac{n_i N l}{EA}$$

Eforturile N sunt unice. Pentru fiecare deplasare se schimbă încărcarea egală cu unitatea și deci eforturile n_i .

Tabelul 5.14

Bara	A	l	N	n_{u6}	$\frac{n_{u6} N l}{EA}$	n_{u3}	$\frac{n_{u3} N l}{EA}$
1-2	A	4	20	1/2	40/EA	1/2	40/EA
1-3	2A	4	20	1	40/EA	0	0
1-4	2A	$2\sqrt{5}$	$20\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/2$	$50\sqrt{5} / EA$	$\sqrt{5}/2$	$50\sqrt{5} / EA$
2-4	2A	$2\sqrt{5}$	$-20\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}/2$	$50\sqrt{5} / EA$	$-\sqrt{5}/2$	$50\sqrt{5} / EA$
2-5	2A	4	-20	-1	40/EA	0	0
3-4	A	2	-30	-1/2	30/EA	-1	60/EA
3-6	2A	4	0	0	0	0	0
3-7	2A	$2\sqrt{5}$	$10\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/2$	$25\sqrt{5} / EA$	0	0
4-5	A	2	10	$1/2$	10/EA	0	0
5-7	2A	$2\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}/2$	$25\sqrt{5} / EA$	0	0
5-8	2A	4	0	0	0	0	0
6-7	A	2	-20	-1	40/EA	0	0
7-8	A	2	0	0	0	0	0

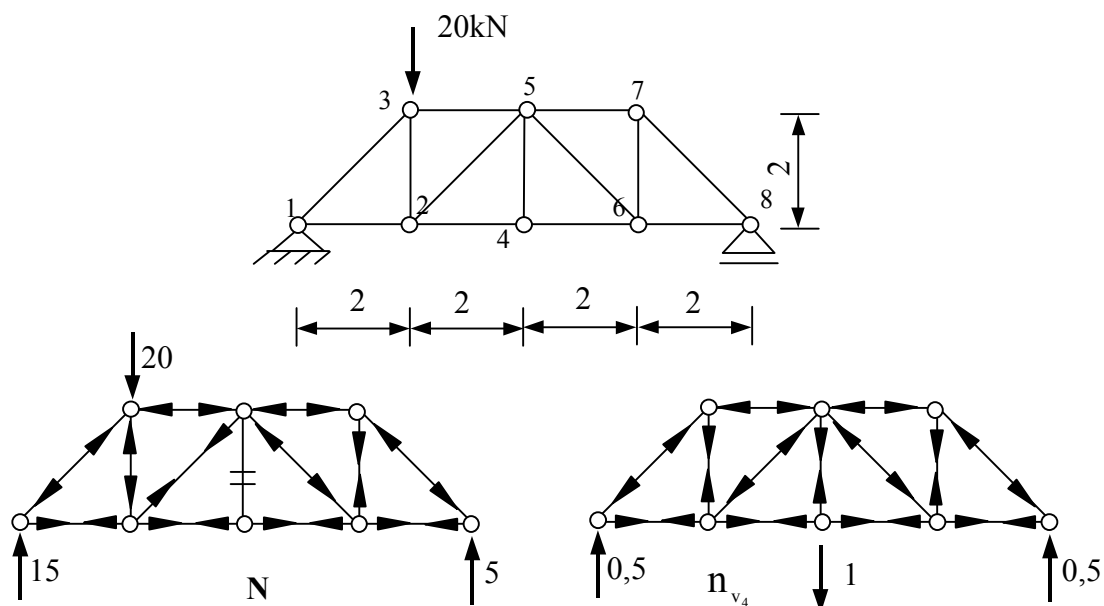
$$u_6 = \sum \frac{n_{u_6} N l}{EA}$$

$$u_3 = \sum \frac{n_{u_3} N l}{EA}$$

$$u_6 = \frac{200 + 150\sqrt{5}}{EA} (\text{metri})$$

$$u_3 = \frac{100(\sqrt{5} + 1)}{EA} (\text{metri})$$

Problema 5.15 (fig.5.15) Translația v_4 . Secțiunile barelor sunt: talpa superioară 2A, talpa inferioară 1,5A, diagonale și montanți A.



- Fig.5.15 -

Tabelul 5.15

Bara	A	l	N	n_{v_4}	$\frac{n_{v_4} N l}{EA}$
1-2	1,5A	2	15	1/2	10/EA
1-3	2A	$2\sqrt{2}$	$-15\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$15\sqrt{2}/EA$
2-3	A	2	-5	1/2	-5/EA
2-4	1,5A	2	10	1	40/3EA
2-5	A	$2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-10\sqrt{2}/EA$
3-5	2A	2	-15	-1/2	7,5/EA
4-5	A	2	0	1	0
4-6	1,5A	2	10	1	40/3EA
5-6	A	$2\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$10\sqrt{2}/EA$
5-7	2A	2	-5	-1/2	2,5/EA
6-7	A	2	5	1/2	5/EA
6-8	1,5A	2	5	1/2	10/3EA
7-8	2A	$2\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$5\sqrt{2}/EA$

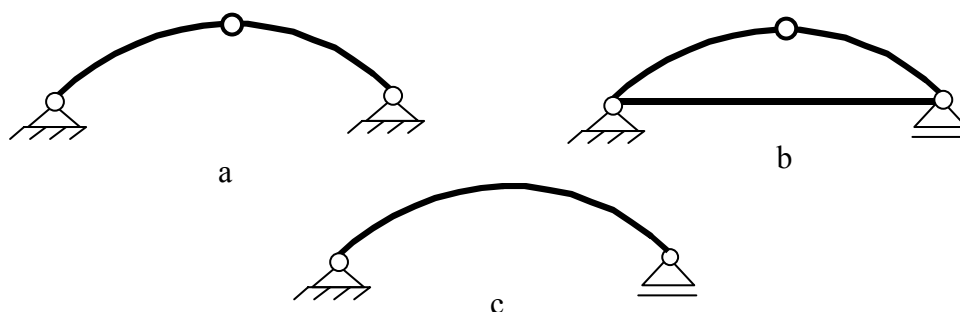
$$v_4 = \frac{50 + 20\sqrt{2}}{EA} = \frac{78,284}{EA} \text{ (metri)}$$

CAPITOLUL VI

ARCE STATIC DETERMINATE

Arcele sunt bare curbe sau sisteme de bare curbe plane, încărcate cu forțe acționând în planul lor. Arcele static determinate sunt:

- arcul cu trei articulații (fig. VI.1,a),
- arcul cu tirant (fig. VI.1,b),
- arcul simplu rezemat (fig. VI.1,c)



- Fig. VI.1 -

Arcul cu trei articulații este utilizat în cazul în care baza de susținere poate prelua în condiții optime împingerile orizontale ale arcului.

Arcul cu tirant este utilizat ori de câte ori preluarea împingerilor orizontale ale arcului – prin fundație sau alte elemente constructive – nu reprezintă o soluție rațională din punct de vedere constructiv și/sau economic.

Arcul simplu rezemat nu este utilizat ca element de rezistență în construcții, însă este utilizat ca instrument de calcul în rezolvarea arcelor static nedeterminate.

Curbele utilizate frecvent pentru realizarea arcelor sunt arcul de cerc și arcul de parabolă.

Ecuția parabolei în sistemul de axe din figura VI.2,a se obține astfel:

- se consideră $y = ax^2 + bx + c$
- constantele a, b și c se determină din condițiile următoare:
 - pentru $x=0$; $y=0$ și rezultă $c=0$
 - pentru $x=L/2$; $y=f$ și rezultă $f = \frac{a \cdot L^2}{4} + \frac{b \cdot L}{2}$
 - pentru $x=L$; $y=0$ și rezultă $0 = a \cdot L^2 + b \cdot L$

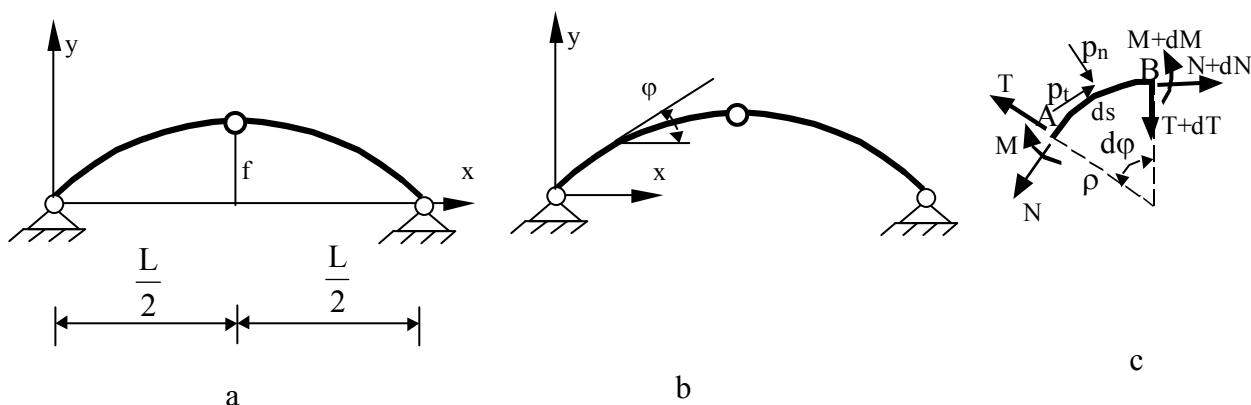
Din ultimele două condiții se obțin succesiv

$$a = -\frac{4f}{L^2}, \quad b = \frac{4f}{L} \quad \text{și apoi ecuația parabolei}$$

$$y = \frac{4fx(L-x)}{L^2} \quad (\text{VI.1})$$

Unghiul φ făcut de tangenta la curbă cu orizontala pentru o secțiune oarecare (fig.VI.2,b) se obține prin derivarea relației (VI.1), rezultând

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f(L-2x)}{L^2} \quad (\text{VI.2})$$



- Fig.VI.2 -

Și în cazul barei curbe plane se pot stabili relații între eforturi și încărcări. Din condițiile de echilibru, pentru elementul infinit mic din figura VI.2,c rezultă

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}; \quad \frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho}; \quad \frac{dM}{ds} = T \quad (\text{VI.3})$$

Din relațiile (VI.3) prin particularizarea $\rho = \infty$ se obțin relațiile similare pentru bara dreaptă.

Pentru arcul cu trei articulații din figura VI.3,a, având reazemele la același nivel și încărcat cu forțe gravitaționale, reacțiunile au următoarele expresii:

$$V_1 = \frac{\sum P_i \cdot b_i}{L} \quad V_2 = \frac{\sum P_i \cdot a_i}{L} \quad H_1 = H_2 = \frac{M_3^0}{f} = H \quad (\text{VI.4})$$

unde M_3^0 reprezintă momentul încovoietor în secțiunea 3 pe o grindă simplu rezemată care are aceeași deschidere și aceeași încărcare ca și arcul dat.

Eforturile în secțiunea curentă au expresiile:

$$N_x = -T_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi$$

$$T_x = T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi \quad (\text{VI.5})$$

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y$$

unde T_x^0 și M_x^0 reprezintă forța tăietoare și momentul încovoietor pe grinda simplu rezemată asociată arcului (care are aceeași deschidere și aceeași încărcare).

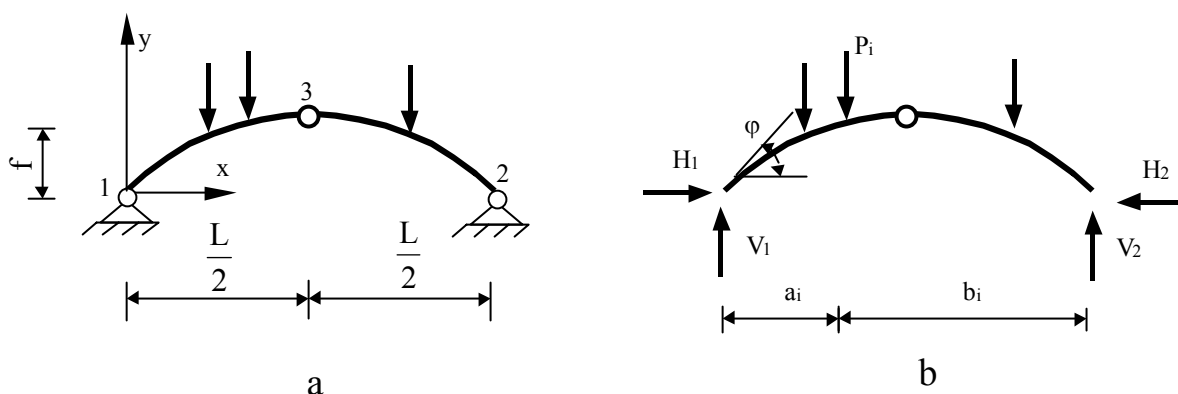


Fig. VI.3

Observații

- Dintre cele trei eforturi din secțiunea curentă N, T, M ponderea cea mai mare, atât în calculul de rezistență cât și în calculul deplasărilor, o au forța axială și momentul încovoietor.

- Dacă pentru o încărcare particulară rezultă momentul încovoietor egal cu zero în toate secțiunile, atunci arcul se numește arc de coincidență pentru acea încărcare.

APLICAȚII

A. Să se calculeze reacțiunile și să se traseze diagramele de eforturi la următoarele arce static determinate:

Problema 6.1 (fig.6.1) Arc parabolic $y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$.

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 12 - 120 \cdot 9 = 0; \quad V_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 120 \cdot 3 - V_2 \cdot 12 = 0; \quad V_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 90 \cdot 6 - H_1 \cdot 4 - 120 \cdot 3 = 0; \quad H_1 = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 4 - 30 \cdot 6 = 0; \quad H_2 = 45 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

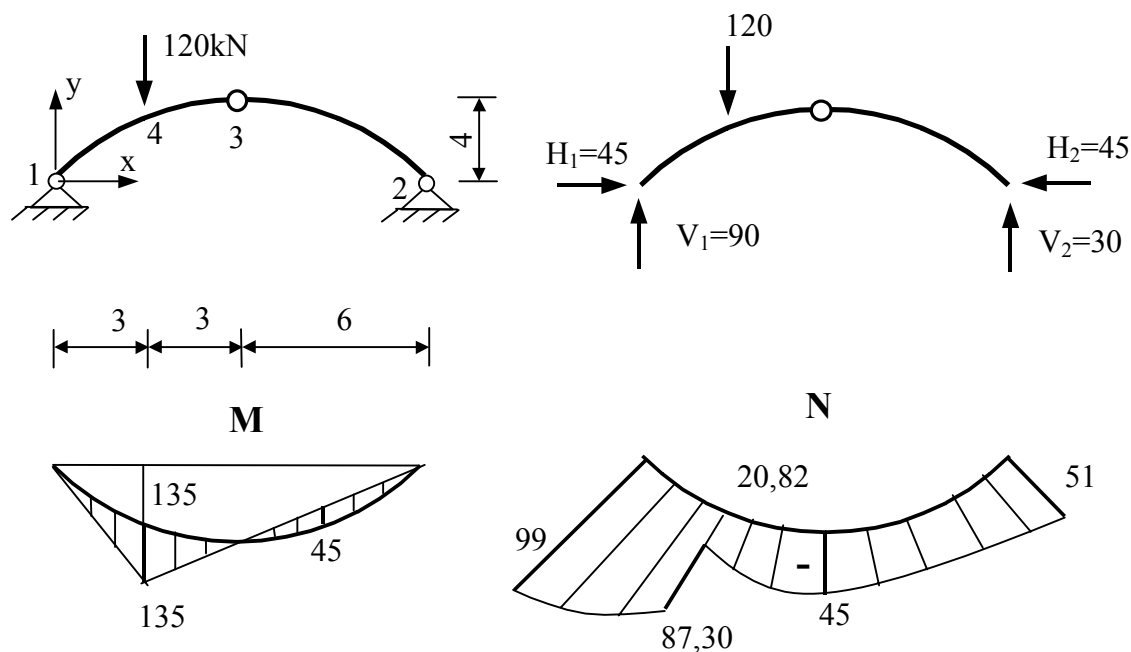
$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2} (L - 2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 2x) = \frac{4}{3} - \frac{2}{9} \cdot x$$

Forța axială

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - H_1 \cos \varphi_1$$

Pentru $x=0$, $\text{tg} \varphi_1 = \frac{4}{3}$; $\sin \varphi_1 = 0,80$, $\cos \varphi_1 = 0,60$

$$N_1 = -90 \cdot 0,8 - 45 \cdot 0,6 = -99 \text{ kN}$$



- Fig. 6.1 -

Pentru $x=3\text{m}$, $\tan \varphi_4 = \frac{2}{3}$; $\sin \varphi_4 = 0,554$, $\cos \varphi_4 = 0,832$

$$N_{4-\varepsilon} = -90 \sin \varphi_4 - 45 \cos \varphi_4 =$$

$$= -90 \cdot 0,554 - 45 \cdot 0,832 = -87,30 \text{ kN}$$

$$N_{4+\varepsilon} = -90 \sin \varphi_4 - 45 \cos \varphi_4 + 120 \sin \varphi_4 =$$

$$= -90 \cdot 0,554 - 45 \cdot 0,832 + 120 \cdot 0,554 = -20,82 \text{ kN}$$

Pentru $x=6\text{m}$ (la cheie) $N_3 = -H_1 = -45 \text{ kN}$ deoarece $\varphi_3=0$, $\sin \varphi_3=0$, $\cos \varphi_3=1$

Pentru $x=12\text{m}$ $\varphi_2 = \varphi_1$ (arcul are reazemele dispuse simetric)

$$N_2 = -V_2 \sin \varphi_2 - H_2 \cos \varphi_2 = -30 \cdot 0,8 - 45 \cdot 0,6 = -51 \text{ kN}$$

Momentul încovoietor

$$M_4 = V_1 \cdot 3 - H_1 \cdot y_4 = 90 \cdot 3 - 45 \cdot 3 = 135 \text{ kNm}$$

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 2-3

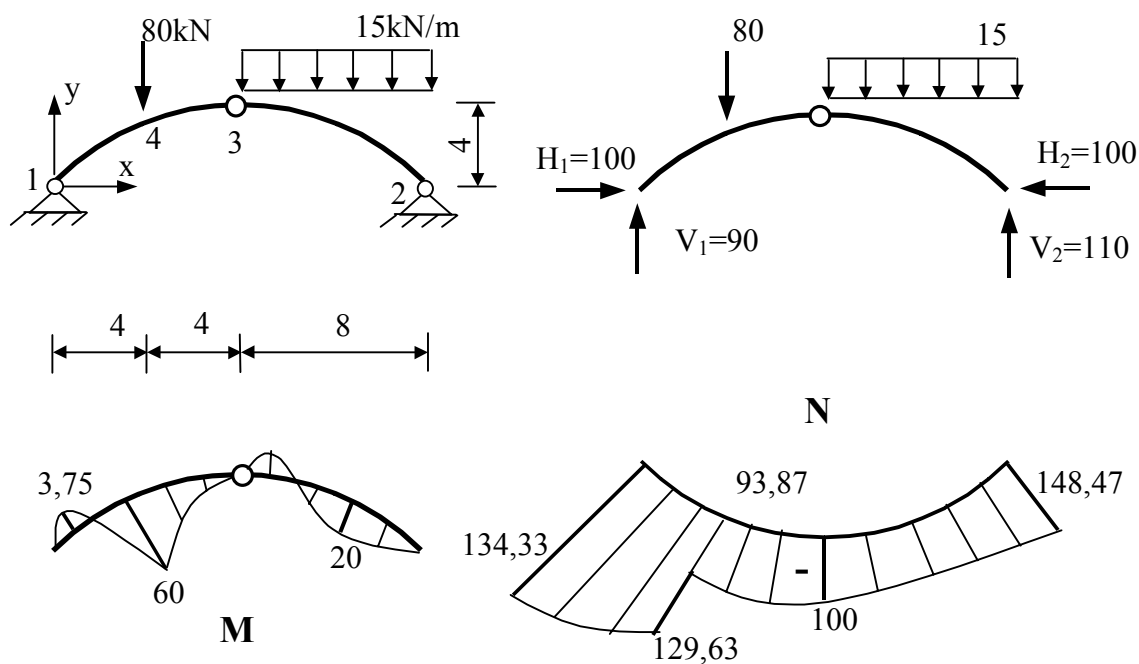
$$M_x = V_2 \cdot x - H_2 \cdot y = 30 \cdot x - 45 \cdot y$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 30 - 45 \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{9} \cdot x \right)$$

Pentru $T_x=0$ rezultă $x=3\text{m}$, respectiv $y=3\text{m}$

$$M_{\max} = 30 \cdot 3 - 45 \cdot 3 = -45 \text{ kNm}$$

Problema 6.2 (fig.6.2) Arc parabolic.



- Fig. 6.2 -

Calculul reacțiunilor

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0; & \quad V_1 \cdot 16 - 80 \cdot 12 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0; & \quad V_1 = 90 \text{ kN} \\ \sum M_1 = 0; & \quad 80 \cdot 4 + 15 \cdot 8 \cdot 12 - V_2 \cdot 16 = 0; & \quad V_2 = 110 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{st}} = 0; & \quad 90 \cdot 8 - H_1 \cdot 4 - 80 \cdot 4 = 0; & \quad H_1 = 100 \text{ kN} \\ \sum M_3^{\text{dr}} = 0; & \quad 15 \cdot 8 \cdot 4 - 110 \cdot 8 + H_2 \cdot 4 = 0; & \quad H_2 = 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Calculul eforturilor

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x) = \frac{4 \cdot 4}{16^2}(16 - 2x) = 1 - \frac{1}{8} \cdot x$$

Forța axială

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - H_1 \cos \varphi_1$$

Pentru $x=0$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$; $\sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 = 0,707$

$$N_1 = -90 \cdot 0,707 - 100 \cdot 0,707 = -134,33 \text{ kN}$$

Pentru $x=4\text{m}$, $\operatorname{tg} \varphi_4 = 0,5$; $\sin \varphi_4 = 0,447$, $\cos \varphi_4 = 0,894$

$$\begin{aligned} N_{4-\varepsilon} &= -V_1 \sin \varphi_4 - H_1 \cos \varphi_4 = \\ &= -90 \cdot 0,447 - 100 \cdot 0,894 = -129,63 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$N_{4+\varepsilon} = N_{4-\varepsilon} + 80 \sin \varphi_4 = -129,63 + 80 \cdot 0,447 = -93,87 \text{ kN}$$

$$N_3 = -H_1 = -100 \text{ kN}$$

$$N_2 = -V_2 \sin \varphi_2 - H_2 \cos \varphi_2 = -110 \cdot 0,707 - 100 \cdot 0,707 = -148,47 \text{ kN}$$

Momentul încovoietor

$$M_{x=1} = V_1 \cdot x - H_1 \cdot y = 90 \cdot 1 - 100 \cdot 0,9375 = -3,75 \text{ kNm}$$

$$M_4 = V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot y_4 = 90 \cdot 4 - 100 \cdot 3 = 60 \text{ kNm}$$

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 2-3

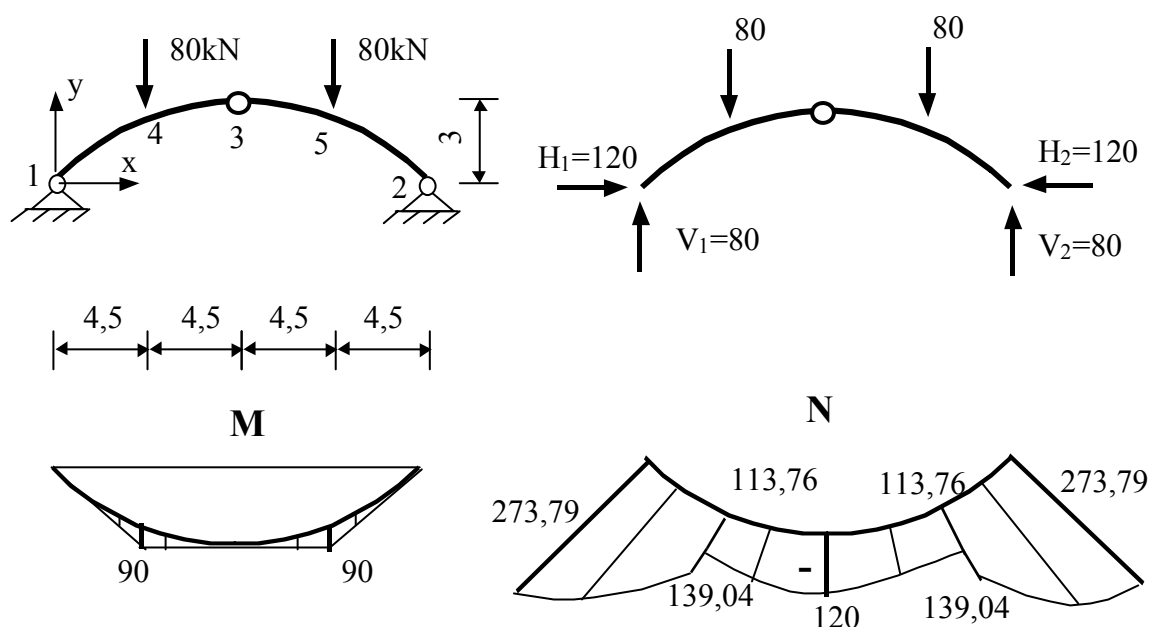
$$M_x = 110 \cdot x - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 100 \cdot y = 110 \cdot x - 7,5 \cdot x^2 - 6,25 \cdot (16 \cdot x - x^2)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 110 - 15 \cdot x - 6,25 \cdot (16 - 2 \cdot x)$$

Pentru $T_x=0$ rezultă $x=4\text{m}$

$$M_{\max} = 110 \cdot 4 - 7,5 \cdot 16 - 6,25 \cdot (64 - 16) = +20 \text{ kNm}$$

Problema 6.3 (fig.6.3) Arc parabolic.



-Fig.6.3 -

Calculul reacțiunilor

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile sunt simetrice

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 18 - 80 \cdot 13,5 - 80 \cdot 4,5 = 0; \quad V_1 = 80 \text{ kN}; \quad V_2 = 80 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 80 \cdot 9 - H_1 \cdot 3 - 80 \cdot 4,5 = 0; \quad H_1 = 120 \text{ kN}; \quad H_2 = 120 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

$$\text{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2} (L - 2x) = \frac{4 \cdot 3}{18^2} (18 - 2x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{27} \cdot x$$

Forța axială – diagrama este simetrică

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - H_1 \cos \varphi_1$$

Pentru $x=0$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2}{3}$; $\sin \varphi_1 = 0,554$ $\cos \varphi_1 = 0,832$

$$N_1 = -80 \cdot 0,554 - 120 \cdot 0,832 = -273,79 \text{ kN}$$

Pentru $x=4,5 \text{ m}$, $\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{1}{3}$; $\sin \varphi_4 = 0,316$, $\cos \varphi_4 = 0,948$

$$N_{4-\varepsilon} = -V_1 \sin \varphi_4 - H_1 \cos \varphi_4 =$$

$$= -80 \cdot 0,316 - 120 \cdot 0,948 = -139,04 \text{ kN}$$

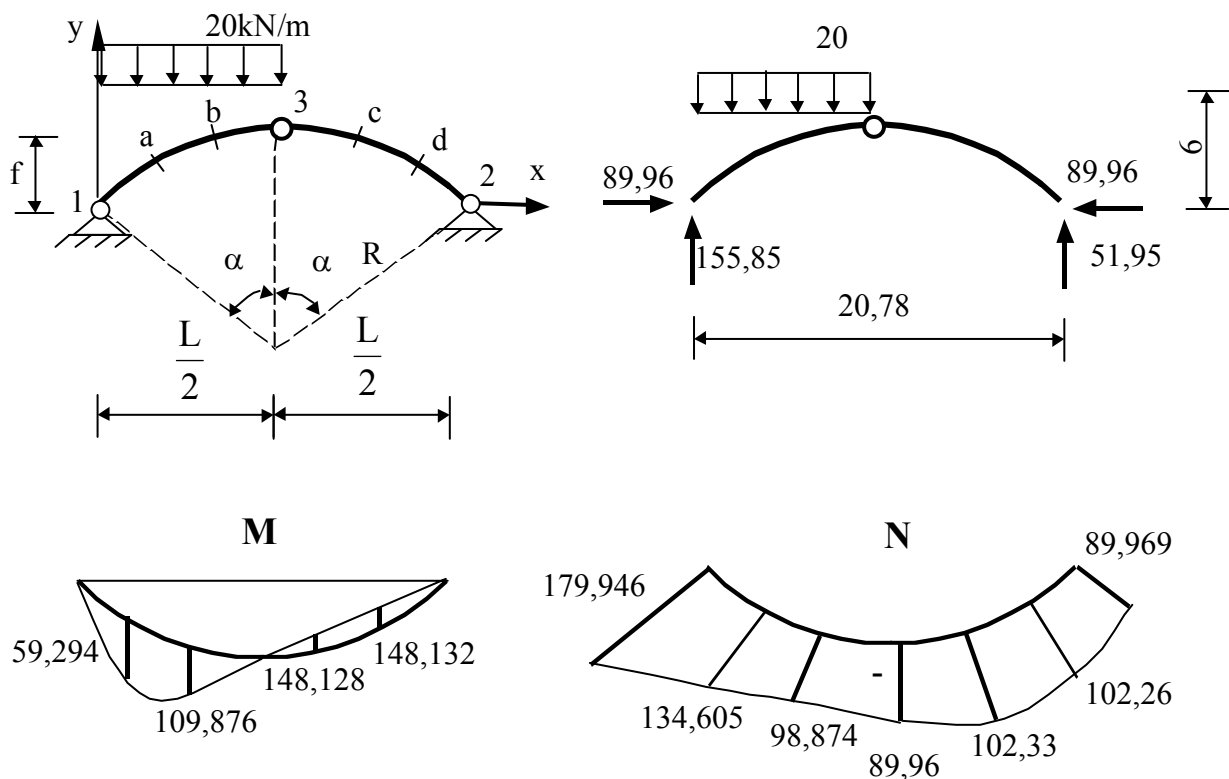
$$N_{4+\varepsilon} = N_{4-\varepsilon} + 80 \sin \varphi_4 = -139,04 + 80 \cdot 0,316 = -113,76 \text{ kN}$$

$$N_3 = -H_1 = -120 \text{ kN}$$

Momentul încovoietor – diagrama este simetrică

$$M_4 = V_1 \cdot 4,5 - H_1 \cdot y_4 = 80 \cdot 4,5 - 120 \cdot 2,25 = 90 \text{ kNm}$$

Problema 6.4 (fig.6.4) Arc circular cu: $R=12\text{m}$, $\alpha=60^\circ$



- Fig.6.4 -

Calculul elementelor geometrice ale arcului

$$\frac{L}{2} = R \sin \alpha ; L = 2R \sin \alpha = R\sqrt{3} = 20,78\text{m}$$

$$f = R - R \cos \alpha = \frac{R}{2} = 6,0\text{m}$$

Coordonatele secțiunilor a,b,c și d se determină după modelul următor:

$$x_a = \frac{L}{2} - R \sin \varphi_a = \frac{L}{2} - R \sin 40^\circ = 10,39 - 7,71 = 2,68\text{m}$$

$$y_a = R \cos \varphi_a - R \cos 60^\circ = 3,192\text{m}$$

Celelalte coordonate sunt date în tabelul 6.4.

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 20,78 - 20 \cdot 10,39 \cdot 15,585 = 0; \quad V_1 = 155,85\text{kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 10,39 \cdot 5,195 - V_2 \cdot 20,78 = 0; \quad V_2 = 51,95\text{kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 6 - 51,95 \cdot 10,39 = 0; \quad H_2 = 89,96\text{kN} \quad H_1 = H_2$$

Calculul eforturilor

Eforturile axiale au fost calculate cu relațiile:

$$\text{- intervalul 1-3} \quad N_i = -V_1 \sin \varphi_i - H_1 \cos \varphi_i + p \cdot x_i \sin \varphi_i ;$$

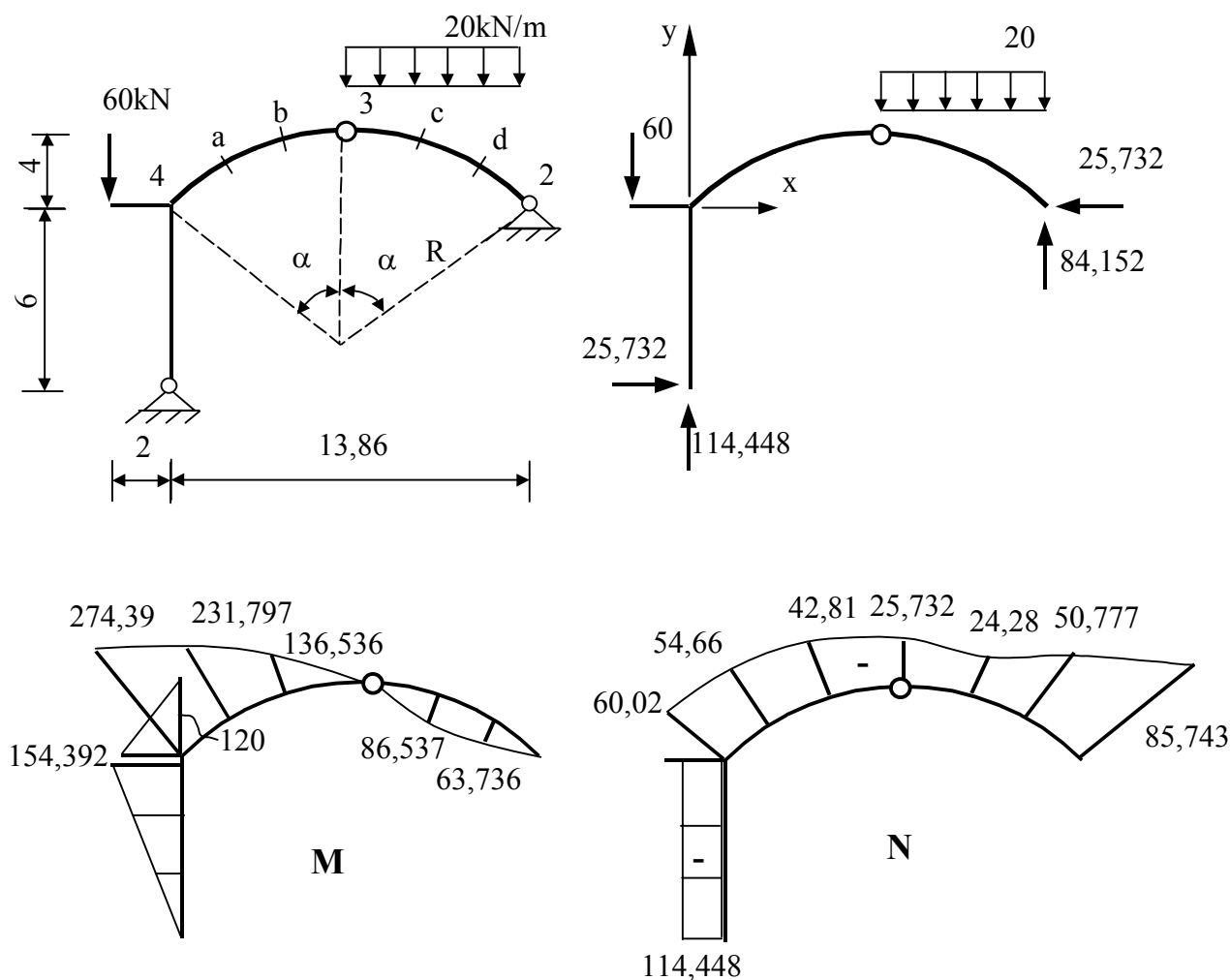
$$\text{- intervalul 2-3} \quad N_i = -V_2 \sin \varphi_i - H_2 \cos \varphi_i ;$$

Momentele încovoietoare calculate cu relația $M_x = M_x^0 - H \cdot y$ și eforturile axiale sunt date în tabelul 6.4.

Tabelul 6.4

Secțiunea	φ_i	$\sin \varphi_i$	$\cos \varphi_i$	x_i	y_i	M_x^0	$-Hy_i$	M_i	N_i
1	60	0,866	0,500	0	0	0	0	0	-179,95
a	40	0,642	0,766	2,676	3,192	346,45	-287,15	59,30	-134,61
b	20	0,342	0,940	6,285	5,276	584,51	-474,63	109,88	-94,87
3	0	0	1,000	10,39	6,0	539,76	-539,76	0	-89,96
c	20	0,342	0,940	14,494	5,276	326,50	-474,63	-148,13	-102,33
d	40	0,642	0,766	18,104	3,192	139,02	-287,15	-148,13	-102,26
2	60	0,866	0,500	20,78	0	0	0	0	-89,97

Problema 6.5 (fig.6.5) Arc de cerc cu $R=8\text{m}$ și $\alpha=60^\circ$



- Fig.6.5 -

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_1 = 0; \quad -60 \cdot 2 + 20 \cdot 6,93 \cdot 10,395 - V_2 \cdot 13,86 - H_2 \cdot 6 = 0$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad 20 \cdot 6,93 \cdot 3,465 - V_2 \cdot 13,86 - H_2 \cdot 6 = 0$$

$$V_2 = 84,152\text{kN}, \quad H_2 = 25,732\text{kN}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad V_1 - 60 - 20 \cdot 6,93 + 84,15 = 0; \quad V_1 = 114,448\text{kN}$$

$$\sum X_i = 0; \quad H_1 - H_2 = 0; \quad H_1 = 25,732\text{kN}$$

Verificare

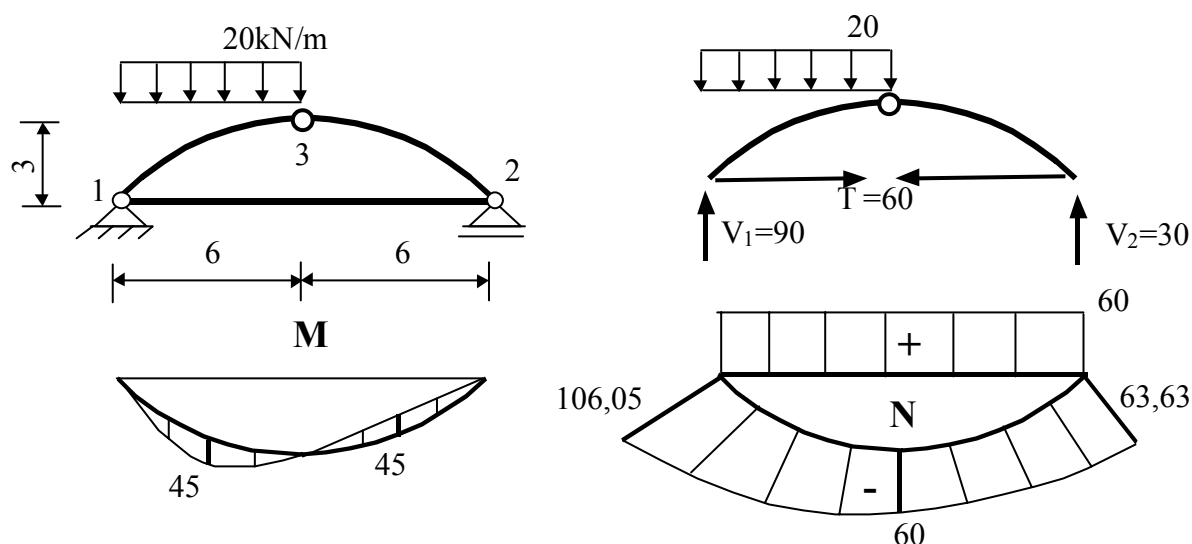
$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad -60 \cdot 8,93 + 14,448 \cdot 6,93 - 25,732 \cdot 10 = 0$$

Eforturile pe arc sunt date în tabelul 6.5

Tabelul 6.5

Secțiunea	φ_i	$\sin \varphi_i$	$\cos \varphi_i$	x_i	y_i	M_i	N_i
4	60	0,866	0,500	0	0	-274,392	-60,02
a	40	0,642	0,766	1,788	2,128	-231,797	-54,66
b	20	0,342	0,940	4,194	3,517	-136,536	-42,81
3	0	0	1,000	6,930	4,000	0	-25,73
c	20	0,342	0,940	9,666	3,517	86,537	-24,28
d	40	0,642	0,766	12,072	2,128	63,736	-50,78
2	60	0,866	0,500	13,860	0	0	-85,74

Problema 6.6 (fig.6.6) Arc parabolic cu tirant



- Fig.6.6 -

Calculul reacțiunilor

Arcul fiind simplu rezemat, iar încărcarea verticală, rezultă $H_1=0$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 12 - 20 \cdot 6 \cdot 9 = 0; \quad V_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 12 = 0; \quad V_2 = 30 \text{ kN}$$

Efortul din tirant se obține din condiția

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 90 \cdot 6 - T \cdot 3 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad T = 60 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

În tirant efortul este de întindere și are valoarea $N=60 \text{ kN}$

Pe arc efortul axial este:

În secțiunea 1 ($x=0$) $\tan \varphi_1 = 1$; $\sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 = 0.707$

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - T \cos \varphi_1 = -106,05 \text{ kN}$$

În secțiunea 3 ($x=6\text{m}$) $N_3 = -T = -60 \text{ kN}$

În secțiunea 2 ($x=12\text{m}$) $\varphi_2 = \varphi_1$

$$N_2 = -V_2 \sin \varphi_2 - T \cos \varphi_2 = -30 \cdot 0,707 - 60 \cdot 0,707 = -63,63 \text{ kN}$$

Momentul încovoietor maxim pe cele două ramuri ale arcului

Ramura 1-3

$$M_x = V_1 \cdot x - T \cdot y - 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 90 \cdot x - 5 \cdot (12 \cdot x - x^2) - 10 \cdot x^2$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 90 - 60 - 10 \cdot x$$

Pentru $T_x=0$ rezultă $x=3\text{m}$

$$M_{\max} = 90 \cdot 3 - 60 \cdot 2,25 - 10 \cdot 9 = +45 \text{ kNm}$$

Ramura 2-3

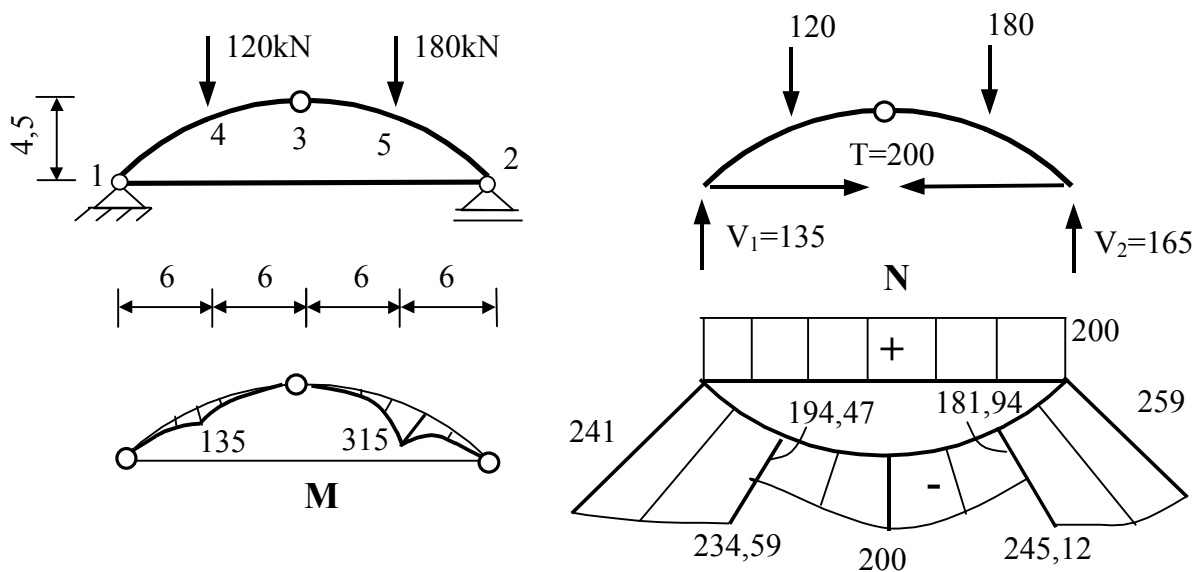
$$M_x = V_2 \cdot x - T \cdot y = 30 \cdot x - 5 \cdot (12 \cdot x - x^2)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x = 30 - 60 + 10 \cdot x$$

Pentru $T_x=0$ rezultă $x=3\text{m}$

$$M_{\max} = 30 \cdot 3 - 60 \cdot 2,25 = -45 \text{ kNm}$$

Problema 6.7 (fig.6.7) Arc parabolic cu tirant



- Fig.6.7 -

Calculul reacțiunilor

$$H_1 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 24 - 120 \cdot 18 - 180 \cdot 6 = 0; \quad V_1 = 135 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 120 \cdot 6 + 180 \cdot 18 - V_2 \cdot 24 = 0; \quad V_2 = 165 \text{ kN}$$

Efortul din tirant

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad 135 \cdot 12 - T \cdot 4,5 - 120 \cdot 6 = 0; \quad T = 200 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor $\text{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2} (L - 2x) = \frac{4 \cdot 4,5}{24^2} (24 - 2x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} \cdot x$

Forța axială

$$N_{12} = T = +200 \text{ kN}$$

$$N_1 = -V_1 \sin \varphi_1 - T \cos \varphi_1 \quad \sin \varphi_1 = 0,6; \quad \cos \varphi_1 = 0,8$$

$$N_1 = -241 \text{ kN}$$

$$N_{4-\varepsilon} = -V_1 \sin \varphi_4 - T \cos \varphi_4 \quad \sin \varphi_4 = 0,351; \quad \cos \varphi_4 = 0,936$$

$$N_{4-\varepsilon} = -234,59 \text{ kN}$$

$$N_{4+\varepsilon} = N_{4-\varepsilon} + 120 \sin \varphi_4 = -234,59 + 120 \cdot 0,351 = -192,47 \text{ kN}$$

$$N_3 = -T = -200 \text{ kN}$$

$$N_2 = -V_2 \sin \varphi_2 - T \cos \varphi_2 = -259 \text{ kN} \quad \varphi_2 = \varphi_1$$

$$N_{5+\varepsilon} = -V_2 \sin \varphi_5 - T \cos \varphi_5 = -245,12 \text{ kN} \quad \varphi_5 = \varphi_4$$

$$N_{5-\varepsilon} = N_{5+\varepsilon} + 180 \sin \varphi_5 = -245,12 + 180 \cdot 0,351 = -181,94 \text{ kN}$$

Momentul încovoietor

$$M_4 = V_1 \cdot 6 - T \cdot y_4 = 135 \cdot 6 - 200 \cdot 3,375 = 135 \text{ kNm}$$

$$M_5 = V_2 \cdot 6 - T \cdot y_5 = 165 \cdot 6 - 200 \cdot 3,375 = 315 \text{ kNm}$$

Problema 6.8 (fig.6.8) Cadru cu trei articulații având rigla un arc semicircular

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 6 + 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

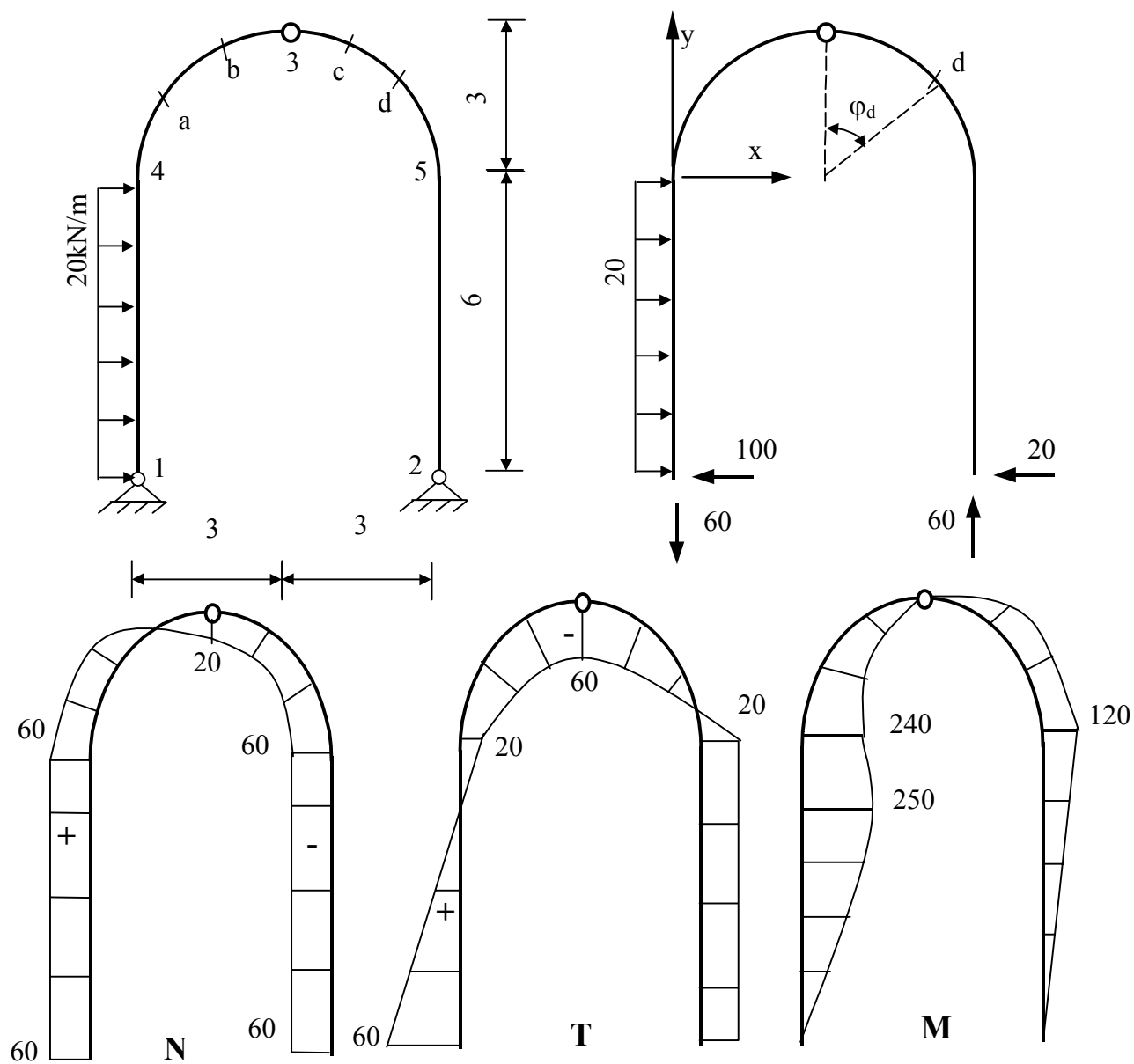
$$\sum M_1 = 0; \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 6 = 0; \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{dr}} = 0; \quad H_2 \cdot 9 - 60 \cdot 3 = 0; \quad H_2 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{\text{st}} = 0; \quad H_1 \cdot 9 - 60 \cdot 3 - 20 \cdot 6 \cdot 6 = 0; \quad H_1 = 100 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor

Eforturile pe arc sunt date în tabelul 6.8

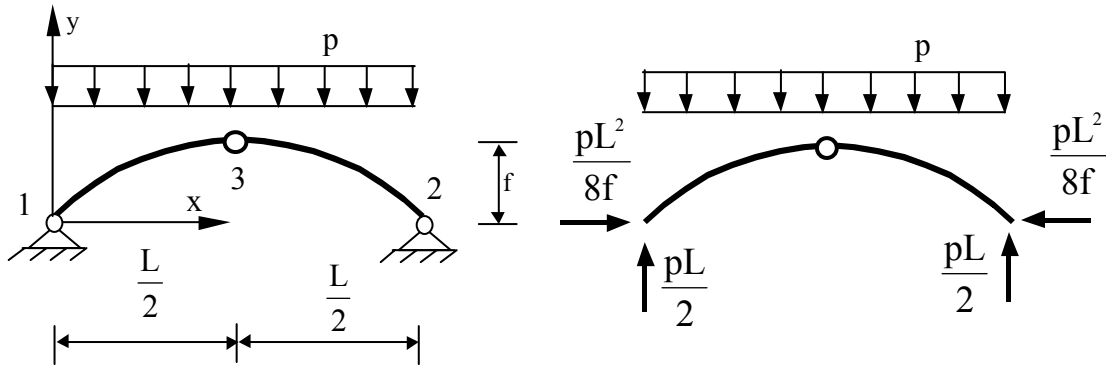


-Fig.6.8 -

Tabelul 6.8

Secțiunea	φ_i	$\sin \varphi_i$	$\cos \varphi_i$	x_i	y_i	M_i	N_i	T_i
4	90	1,000	0	0	0	240	60,00	-20,00
a	60	0,866	0,500	0,716	1,500	137,04	41,96	-47,32
b	30	0,500	0,866	1,500	2,598	98,04	42,68	-61,96
3	0	0	1,000	3,000	3,000	0	-20,00	-60,00
c	30	0,500	0,866	4,500	2,598	-81,96	-47,32	-41,96
d	60	0,866	0,500	5,284	1,500	-107,04	-61,96	-12,68
5	90	1,000	0	6	0	-120	-60,00	20,00

Problema 6.9 (fig.6.9) Să se determine ecuația curbei de coincidență pentru arcul cu trei articulații, încărcat cu o forță verticală, uniform distribuită pe orizontală, în sistemul de axe din figura 6.9.



-Fig.6.9 -

Calculul reacțiunilor

$$V_1 = V_2 = \frac{pL}{2}$$

$$\sum M_3^{st} = 0; \quad \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{2} - H_1 \cdot f - p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0; \quad H_1 = \frac{pL^2}{8f} = H_2$$

Momentul încovoietor în secțiunea curentă este

$$M_x = \frac{pL}{2} \cdot x - \frac{pL^2}{8f} \cdot y - p \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Condiția de arc de coincidență este $M_x=0$ pentru oricare valoare a lui x . Deci

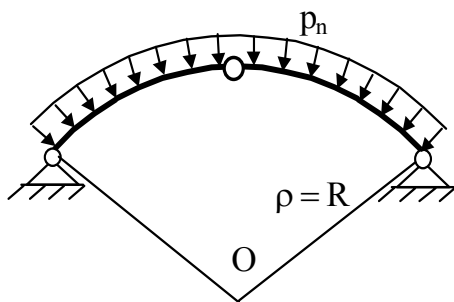
$$\frac{pL}{2} \cdot x - \frac{pL^2}{8f} \cdot y - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

de unde rezultă

$$y = \frac{4fx}{L^2}(L - x)$$

Expresia obținută reprezintă o parabolă raportată la sistemul de axe din figura 6.9 și este identică cu (VI.1) stabilită pe altă cale.

Problema 6.10 (fig.6.10) Să se determine forma curbei de coincidență, pentru arcul cu trei articulații, supus unei încărcări constante, normale la axa barei.



- Fig.6.10 -

Pentru rezolvarea acestei probleme se utilizează relațiile (VI.2), dintre eforturi și încărcări, stabilite pentru bara curbă. Din condiția de arc de coincidență $M_x=0$, rezultă $T_x=0$.

Deoarece nu există forțe cu componente pe direcția tangentei la curbă, rezultă $p_t=0$.

Din prima relație (VI.2) se obține

$$\frac{dN}{ds} = 0 \text{ și deci } N = \text{constant}$$

Din a doua relație (VI.2) se obține

$$0 = -p_n - \frac{N}{\rho} \text{ sau } N = -p_n \cdot \rho$$

Deoarece $p_n = \text{constant}$ și $N = \text{constant}$, rezultă $\rho = \text{constant} = R$. Curba care are raza de curbură constantă este arcul de cerc, iar forța axială în acest caz, este forța de compresiune și are expresia

$$N = -p_n \cdot R$$

Dacă presiunea normală constantă se exercită din interior atunci forța axială are aceeași expresie și este forța de întindere.

CAPITOLUL VII

UTILIZAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL ÎN CALCULUL STRUCTURILOR STATIC DETERMINATE

Principiul lucrului mecanic virtual a fost utilizat în Mecanica Teoretică pentru studiul echilibrului static al sistemelor de corpuri cu un grad de libertate. Enunțul acestui principiu este următorul: ***“condiția necesară și suficientă ca un sistem de corpuri să fie în echilibru static, sub acțiunea unui sistem de forțe, este ca lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe, parcurgând deplasări virtuale să fie egal cu zero”***.

Deplasările virtuale sunt deplasări imaginate, dar posibile, infinit mici și compatibile cu legăturile interioare și exterioare ale sistemului de corpuri, iar lucrul mecanic efectuat de forțele reale parcurgând deplasările virtuale se numește lucru mecanic virtual. Deoarece deplasările sunt virtuale principiul lucrului mecanic virtual reprezintă în această situație varianta denumită *principiul deplasărilor virtuale*.

Forma matematică a acestui principiu este:

$$\delta L = \sum P_i \cdot \delta \eta_i + \sum M_j \cdot \delta \psi_j = 0 \quad (\text{VII.1})$$

unde P_i și M_j reprezintă forțele și momentele sistemului real de încărcări, iar $\delta \eta_i$ și $\delta \psi_j$ reprezintă deplasarea pe direcția forței P_i respectiv rotirea corpului pe care acționează momentul concentrat M_j .

Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual în calculul reacțiunilor sau eforturilor structurilor static determinate necesită următoarele operații:

- pentru fiecare mărime statică – reacțiune sau efort – ce urmează a fi determinată se transformă structura static determinată într-un mecanism cu un grad de libertate, eliminând legătura de pe direcția reacțiunii sau a efortului ce se va calcula;
- pe direcția acestei legături se introduce echivalentul său mecanic, astfel încât în această situație, sistemul de forțe este format din forțele reale – cunoscute – și echivalentul mecanic al legăturii suprimate – necunoscut;
- se imprimă deplasarea virtuală mecanismului și se determină translațiile punctelor de aplicație ale forțelor și rotațiile corpurilor mecanismului;
- se exprimă lucrul mecanic virtual produs de forțele și momentele reale și de echivalentul mecanic al legăturilor suprimate. Forma principiului este acum următoarea

$$\delta L = \sum P_i \cdot \delta \eta_i + \sum M_j \cdot \delta \psi_j + S \cdot \delta s = 0 \quad (\text{VII.2})$$

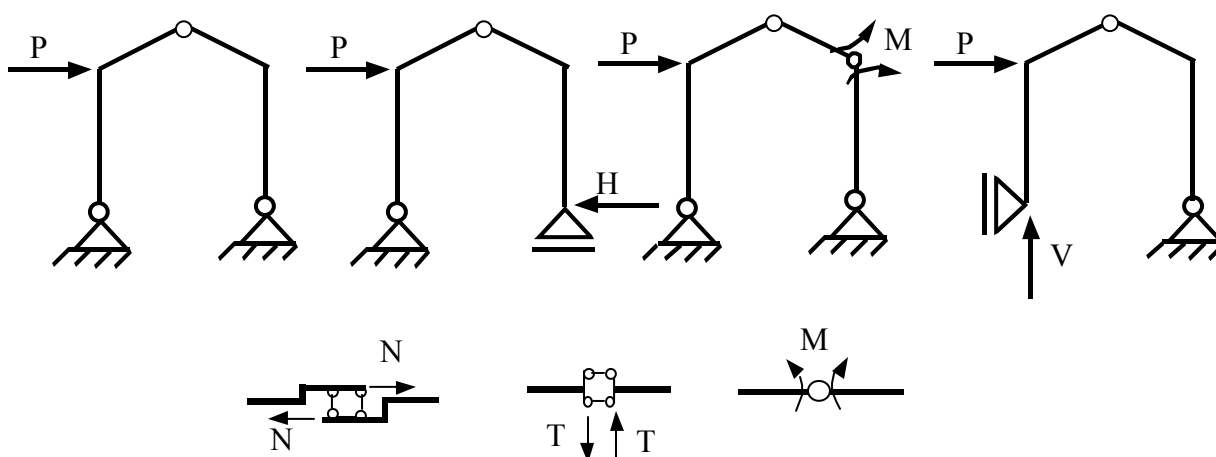
unde S este necunoscuta problemei iar δs deplasarea pe direcția sa (translație sau rotație).

Expresia (VII.2) reprezintă o ecuație cu o singură necunoscută S .

Rezultă din cele de mai sus următoarele:

- pentru calculul mai multor reacțiuni sau eforturi este necesar să se stabilească mecanismul corespunzător,
- pentru determinarea deplasărilor pe direcțiile forțelor reale este necesar să se traseze diagramele de deplasări ale corpurilor mecanismului în funcție de deplasarea virtuală imprimată,
- pentru trasarea diagramelor de deplasări este necesară stabilirea poziției centrelor instantanee de rotație ale corpurilor.

În figura VII.1 sunt prezentate câteva exemple de mecanisme obținute dintr-o structură static determinată, precum și schemele legăturilor ce se introduc într-o secțiune curentă în cazul în care se suprimă legătura corespunzătoare momentului încovoietor, forței tăietoare sau forței axiale.



- Fig.VII.1 -

Pentru un mecanism format din n corpuri există n centre absolute și C_n^2 centre relative. Centrul absolut al unui corp se caracterizează prin aceea că viteza sa absolută este egală cu zero, deci și deplasarea acestui punct este egală cu zero.

Centrul relativ a două corpuri se caracterizează prin aceea că viteza relativă a celor două corpuri este egală cu zero, iar deplasarea – în dreptul acestui punct – este aceeași pentru ambele corpuri. Uzual corpurile se notează cu cifre romane I, II, III etc., centrele absolute cu (1), (2), (3) etc., iar centrele relative cu (1,2), (1,3), (2,3) etc.

Poziția centrelor instantanee se stabilește cu ajutorul teoremei de coliniaritate a centrelor instantanee și anume: pentru sistemele cinematice plane (mecanisme) trei centre instantanee a trei corpuri oarecare sunt coliniare”. Prin termenul de corp se înțelege aici și baza de susținere. Prin clasificarea centrelor instantanee în absolute și relative, teorema generală de coliniaritate poate fi enunțată sub două variante – utile în aplicarea practică – și anume:

- centrele absolute a două corpuri și centrul lor relativ sunt coliniare,

- centrele relative a trei corpuri, luate două câte două, sunt coliniare.

În aplicațiile practice, articulațiile cu baza de susținere reprezintă centre absolute, iar articulațiile dintre corpuri reprezintă centre relative.

Poziția unui centru instantaneu se determină ca punct de intersecție a două direcții. De exemplu, poziția centrului absolut al corpului II se stabilește cu ajutorul corpurilor I și III pentru care se cunosc (1) și (3) respectiv (1,2) și (2,3)

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases}$$

Poziția centrului relativ al corpurilor I și III se stabilește astfel

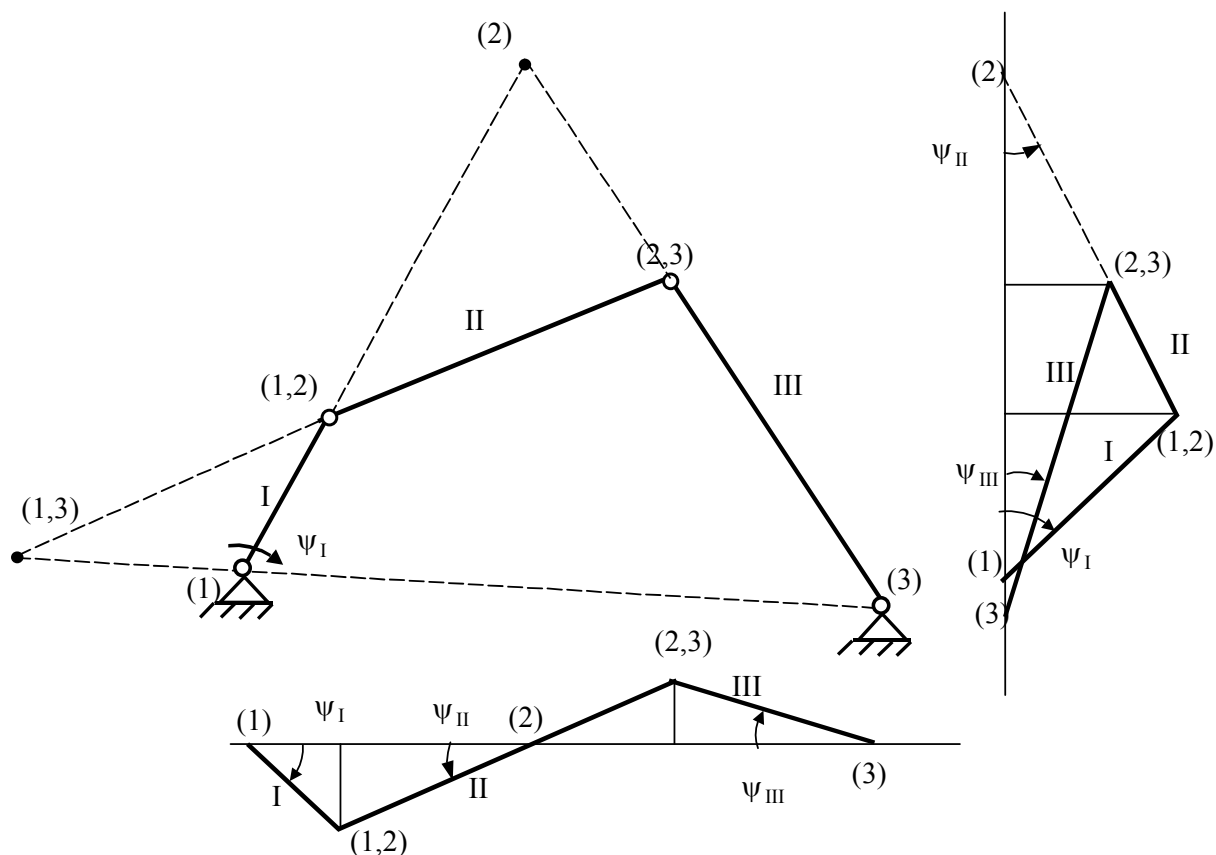
$$(1,3) \begin{cases} (1,3), (1), (3) \\ (1,3), (2,3), (1,2) \end{cases}$$

Dacă un corp are un reazem simplu atunci centrul său absolut se află pe normala la planul de rezemare.

Deoarece în construcții majoritatea forțelor au direcția verticală sau orizontală diagramele de deplasări se vor reprezenta pe verticală și orizontală.

APLICAȚII

Problema 7.1 (fig.7.1) Să se traseze diagramele de deplasări ale mecanismului din figura 7.1, căruia i se imprimă deplasarea virtuală ψ_1 .



- Fig.7.1 -

Determinarea poziției centrelor instantanee necunoscute

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases} \quad (1,3) \begin{cases} (1,3), (1), (3) \\ (1,3), (2,3), (1,2) \end{cases}$$

Deoarece în diagramele de deplasări corpurile sunt reprezentate prin segmente de dreaptă (iar diagramele au variație liniară) orice translație sau rotire de corp se poate determina în funcție de deplasarea virtuală imprimată mecanismului.

Problema 7.2 (fig.7.2) Să se determine, utilizând principiul lucrului mecanic virtual, următoarele mărimi statice: reacțiunea V_2 , momentul încovoietor M_2 , forța tăietoare $T_{2-\varepsilon}$.

Calculul reacțiunii V_2 .

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{ reazem} \end{cases}$$

Imprimând rotirea ψ_1 corpului I rezultă diagrama de deplasări. Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L = 0$$

$$10 \cdot 15 \cdot \eta_1 - V_2 \cdot \eta_2 + 60 \cdot \eta_4 - 30 \cdot \eta_5 = 0$$

$$\eta_1 = 7,5\psi_1; \quad \eta_2 = 12\psi_1;$$

$$\eta_3 = 15\psi_1;$$

$$\psi_2 = \frac{\eta_3}{9} = \frac{5}{3}\psi_1;$$

$$\eta_4 = \frac{1}{2}\eta_3 = 7,5\psi_1;$$

$$\eta_5 = 3\psi_2 = 5\psi_1$$

$$\psi_1 \cdot (150 \cdot 7,5 - V_2 \cdot 12 + 60 \cdot 7,5 - 30 \cdot 5) = 0$$

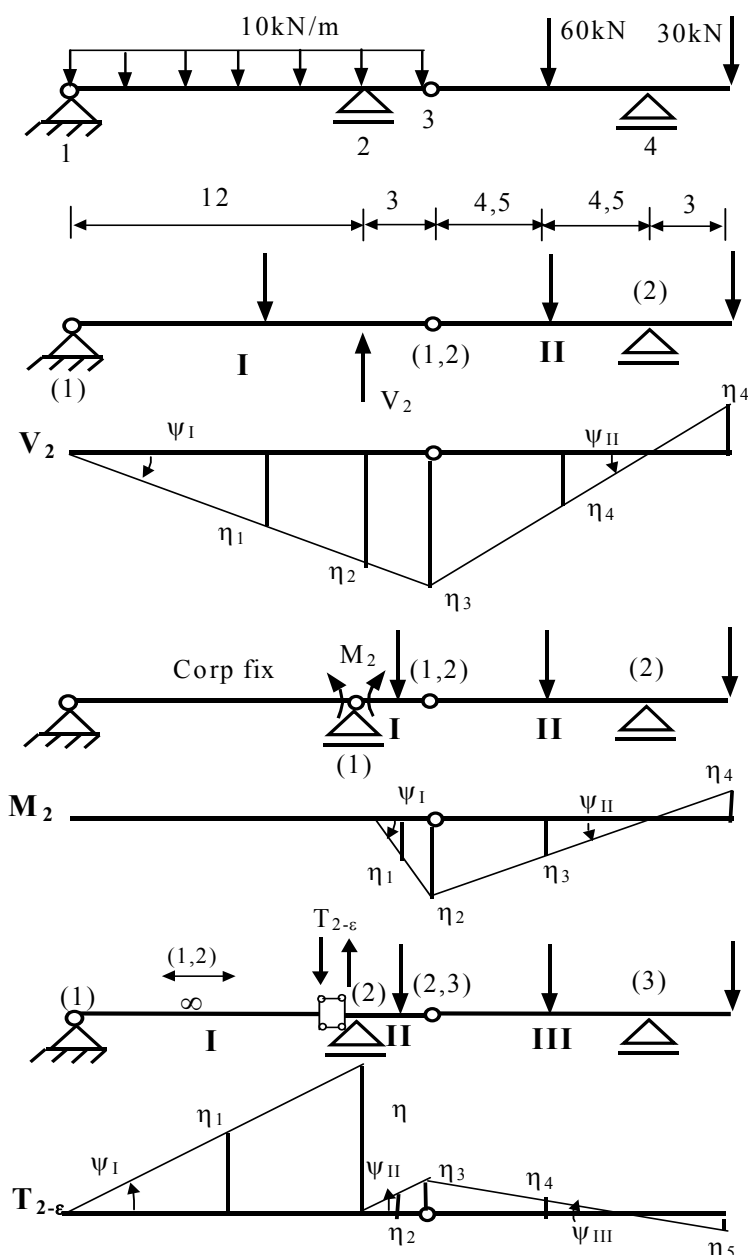
Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă

ecuația:

$$1425 - V_2 \cdot 12 = 0;$$

de unde

$$V_2 = 118,75 \text{ kN}$$



- Fig. 7.2 -

Semnul plus semnifică faptul că reacțiunea V_2 are sensul adoptat inițial.

Calculul momentului încovoietor M_2 . Deoarece grinda 1-2, rezultată în urma întreruperii continuității în secțiunea 2 a grinzii principale 1-2-3, este o grindă simplu rezemată, deci fixă, mecanismul obținut este un mecanism parțial și se extinde numai în zona 2-3-4.

$$\delta L = 0; \quad M_2 \cdot \psi_1 + 10 \cdot 3 \cdot \eta_1 + 60 \cdot \eta_3 - 30 \cdot \eta_4 = 0$$

$$\eta_1 = 1,5\psi_1; \quad \eta_2 = 3\psi_1; \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 = 1,5\psi_1;$$

$$\psi_2 = \frac{\eta_2}{9} = \frac{1}{3}\psi_1; \quad \eta_4 = 3\psi_2 = \psi_1$$

$$\psi_1 \cdot (M_2 + 30 \cdot 1,5 + 60 \cdot 1,5 - 30 \cdot 1) = 0 \quad M_2 = 105 \text{ kNm}$$

Calculul forței tăietoare $T_{2-\varepsilon}$. Corpurile I și II fiind legate printr-un mecanism format din două bare, dublu articulate, paralele, au centrul lor relativ la infinit pe orizontală. Rezultă că în poziția deplasată cele două corpuri sunt paralele. **Aceasta este cheia problemei.** Deci, $\psi_1 = \psi_2$. Imprimând o deplasare virtuală η pe direcția forței tăietoare rezultă diagrama de deplasări.

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L = 0; \quad -T_{2-\varepsilon} \cdot \eta - 10 \cdot 12 \cdot \eta_1 - 10 \cdot 3 \cdot \eta_2 - 60 \cdot \eta_4 + 30 \cdot \eta_5 = 0$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\eta; \quad \psi_1 = \frac{\eta}{12} = \psi_2; \quad \eta_2 = 1,5\psi_2 = \frac{1}{8}\eta;$$

$$\eta_3 = 3\psi_2 = \frac{1}{4}\eta; \quad \eta_4 = \frac{1}{2}\eta_3 = \frac{1}{8}\eta; \quad \psi_3 = \frac{\eta_3}{9} = \frac{1}{36}\eta;$$

$$\eta_5 = 3\psi_3 = \frac{1}{12}\eta$$

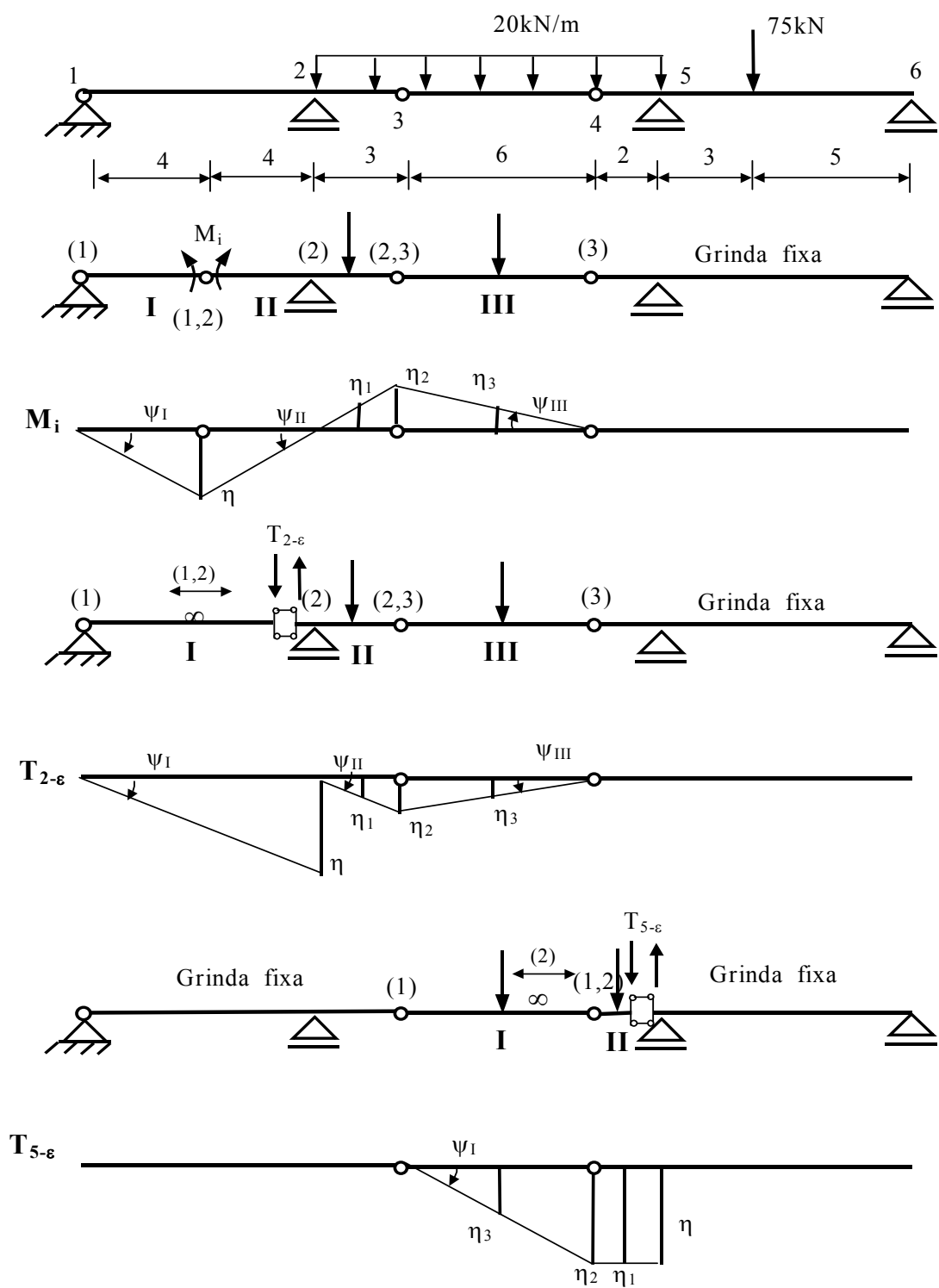
$$\eta \cdot \left(T_{2-\varepsilon} - 120 \cdot \frac{1}{2} - 30 \cdot \frac{1}{8} - 60 \cdot \frac{1}{8} + 30 \cdot \frac{1}{12} \right) = 0$$

Pentru $\eta \neq 0$ rezultă

$$T_{2-\varepsilon} = -68,75 \text{ kN}$$

Forța tăietoare este negativă.

Problema 7.3 (fig.7.3) Momentul încovoietor M_i , forțele tăietoare $T_{2-\varepsilon}$ și $T_{5-\varepsilon}$.



- Fig.7.3 -

Calculul momentului încovoietor M_i

$$\delta L = 0; \quad -M_i \cdot \psi_1 - M_i \cdot \psi_2 - 20 \cdot 3 \cdot \eta_1 - 20 \cdot 6 \cdot \eta_3 = 0$$

$$\psi_2 = \psi_1; \quad \eta_1 = 1,5\psi_2; \quad \eta_2 = 3\psi_2; \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 = \frac{3}{2}\psi_2;$$

$$\psi_2 \cdot (-M_i \cdot 2 - 60 \cdot 1,5 - 120 \cdot 1,5) = 0$$

Pentru $\psi_2 \neq 0$ rezultă $M_i = -135 \text{ kNm}$

Momentul încovoietor M_i real întinde fibra superioară.

Calculul forței tăietoare $T_{2-\varepsilon}$

Centrul relativ (1,2) fiind la infinit pe orizontală, cele două corpuri sunt paralele în poziția deplasată.

$$\delta L = 0; \quad T_{2-\varepsilon} \cdot \eta + 20 \cdot 3 \cdot \eta_1 + 20 \cdot 6 \cdot \eta_3 = 0$$

$\psi_1 = \psi_2$ -corpurile fiind paralele

$$\psi_1 = \frac{1}{8}\eta; \quad \eta_1 = 1,5\psi_2 = \frac{1,5}{8}\eta; \quad \eta_2 = 3\psi_2 = \frac{3}{8}\eta; \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 = \frac{3}{16}\eta;$$

$$\eta \cdot \left(T_{2-\varepsilon} + 60 \cdot \frac{1,5}{8} + 120 \cdot \frac{3}{16} \right) = 0$$

Pentru $\eta \neq 0$ rezultă $T_{2-\varepsilon} = -33,75 \text{ kN}$

Calculul forței tăietoare $T_{5-\varepsilon}$

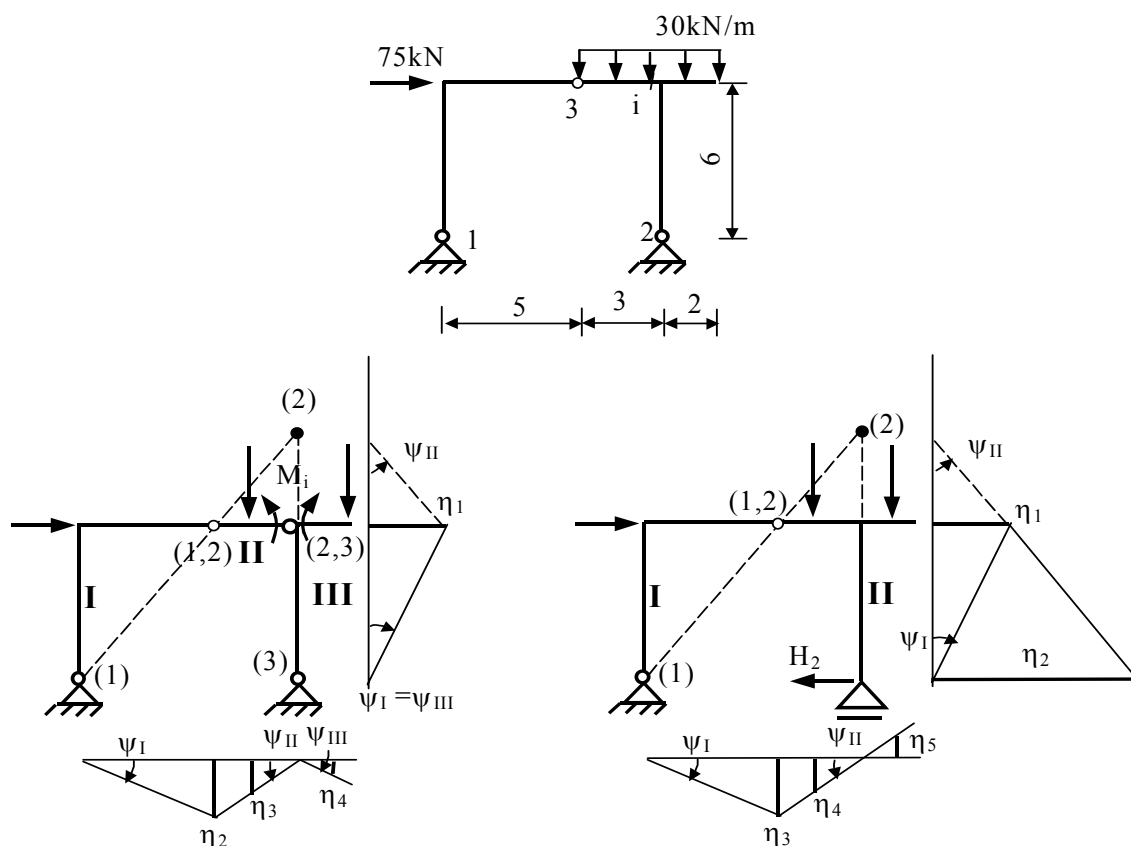
$$\delta L = 0; \quad T_{2-\varepsilon} \cdot \eta + 20 \cdot 2 \cdot \eta + 20 \cdot 6 \cdot \eta_3 = 0$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}\eta;$$

$$\eta \cdot \left(T_{5-\varepsilon} + 40 + 120 \cdot \frac{1}{2} \right) = 0$$

Pentru $\eta \neq 0$ rezultă $T_{2-\varepsilon} = -100 \text{ kN}$

Problema 7.4 (fig.7.4) Momentul încovoiător M_i și reacțiunea orizontală H_2 .



- Fig.7.4 -

Calculul momentului încovoiător M_i

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases}$$

$$\delta L = 0; \quad 75 \cdot \eta_1 + M_i \cdot \psi_2 + M_i \cdot \psi_3 + 30 \cdot 3 \cdot \eta_3 + 30 \cdot 2 \cdot \eta_4 = 0$$

$$\psi_1 = \psi_3; \quad \eta_1 = 6\psi_1; \quad \eta_2 = 5\psi_1; \quad \psi_2 = \frac{\eta_2}{3} = \frac{5}{3}\psi_1;$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}\eta_2 = 2,5\psi_1; \quad \eta_4 = 1\psi_3 = \psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot \left(75 \cdot 6 + M_i \cdot \frac{5}{3} + M_i + 90 \cdot 2,5 + 60 \cdot 1 \right) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezulta $M_i = -275,625 \text{ kNm}$

Calculul reacțiunii orizontale H_2

$$\delta L = 0; \quad 75 \cdot \eta_1 - H_2 \cdot \eta_2 + 30 \cdot 3 \cdot \eta_4 - 30 \cdot 2 \cdot \eta_5 = 0$$

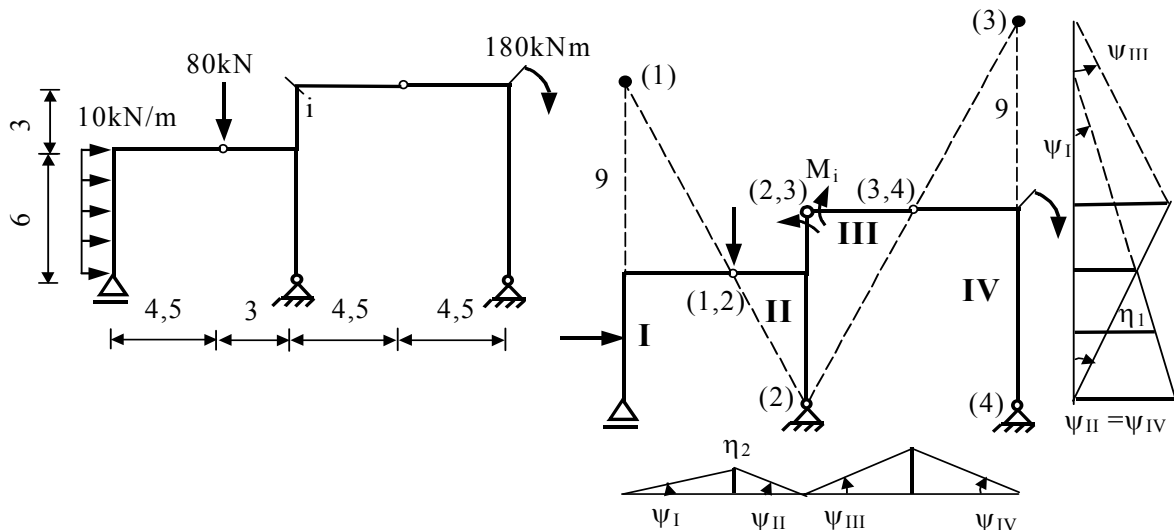
$$\eta_1 = 6\psi_1; \quad \eta_3 = 5\psi_1; \quad \psi_2 = \frac{\eta_3}{3} = \frac{5}{3}\psi_1; \quad \eta_2 = 9,6\psi_2 = 16\psi_1;$$

$$\eta_4 = \frac{1}{2}\eta_3 = 2,5\psi_1; \quad \eta_5 = 1\psi_3 = \frac{5}{3}\psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot \left(75 \cdot 6 - H_2 \cdot 16 + 90 \cdot 2,5 - 60 \cdot \frac{5}{3} \right) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă $H_2 = -35,94 \text{ kN}$

Problema 7.5 (fig.7.5) Momentul încovoietor M_i .



- Fig.7.5 -

Calculul momentului încovoietor M_i

$$\delta L = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot \eta_1 - M_i \cdot \psi_2 - M_i \cdot \psi_3 - 80 \cdot \eta_2 + 180 \cdot \varphi_4 = 0$$

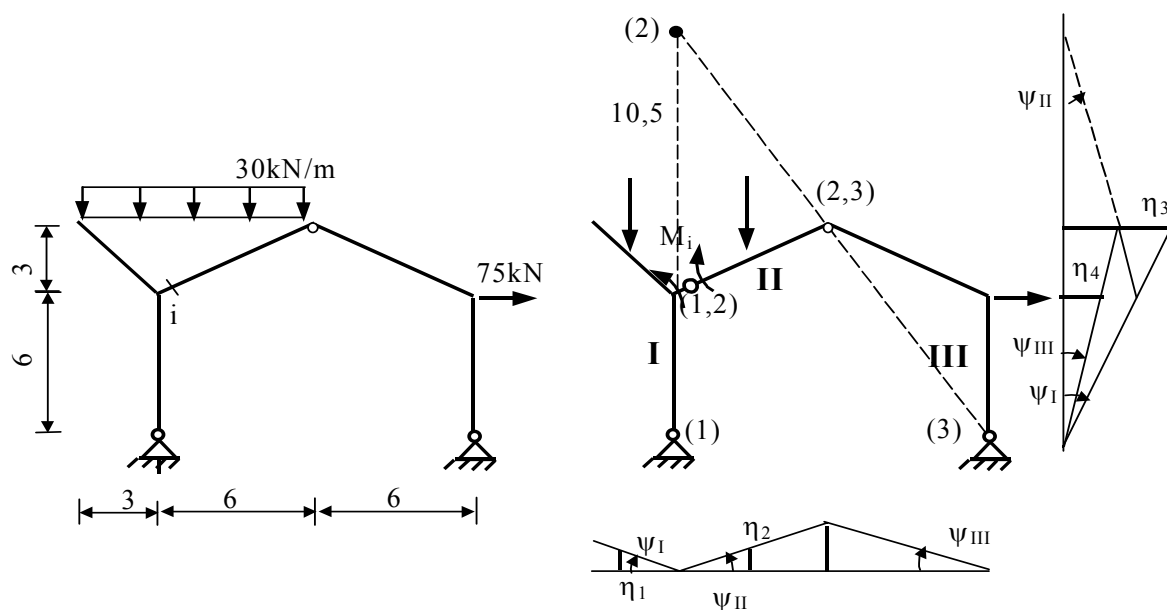
$$\psi_2 = \psi_4; \quad \eta_1 = 12\psi_1; \quad \eta_2 = 3\psi_2 = 4,5\psi_1;$$

$$\psi_2 = 1,5\psi_1; \quad \psi_3 = \psi_4 = \psi_2 = 1,5\psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot (60 \cdot 12 - M_i \cdot 1,5 - M_i \cdot 1,5 - 80 \cdot 4,5 + 180 \cdot 1,5) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă $M_i = 210 \text{ kNm}$

Problema 7.6 (fig.7.6) Momentul încovoietor M_i



- Fig.7.6 -

Calculul momentului încovoietor M_i

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases}$$

$$\delta L = 0; \quad -20 \cdot 3 \cdot \eta_1 - 20 \cdot 6 \cdot \eta_2 - M_i \cdot \psi_1 - M_i \cdot \psi_2 + 60 \cdot \eta_4 = 0$$

$$\psi_2 = \psi_3; \quad 7,5\psi_1 = 13,5\psi_2; \quad \psi_2 = 0,555\psi_1;$$

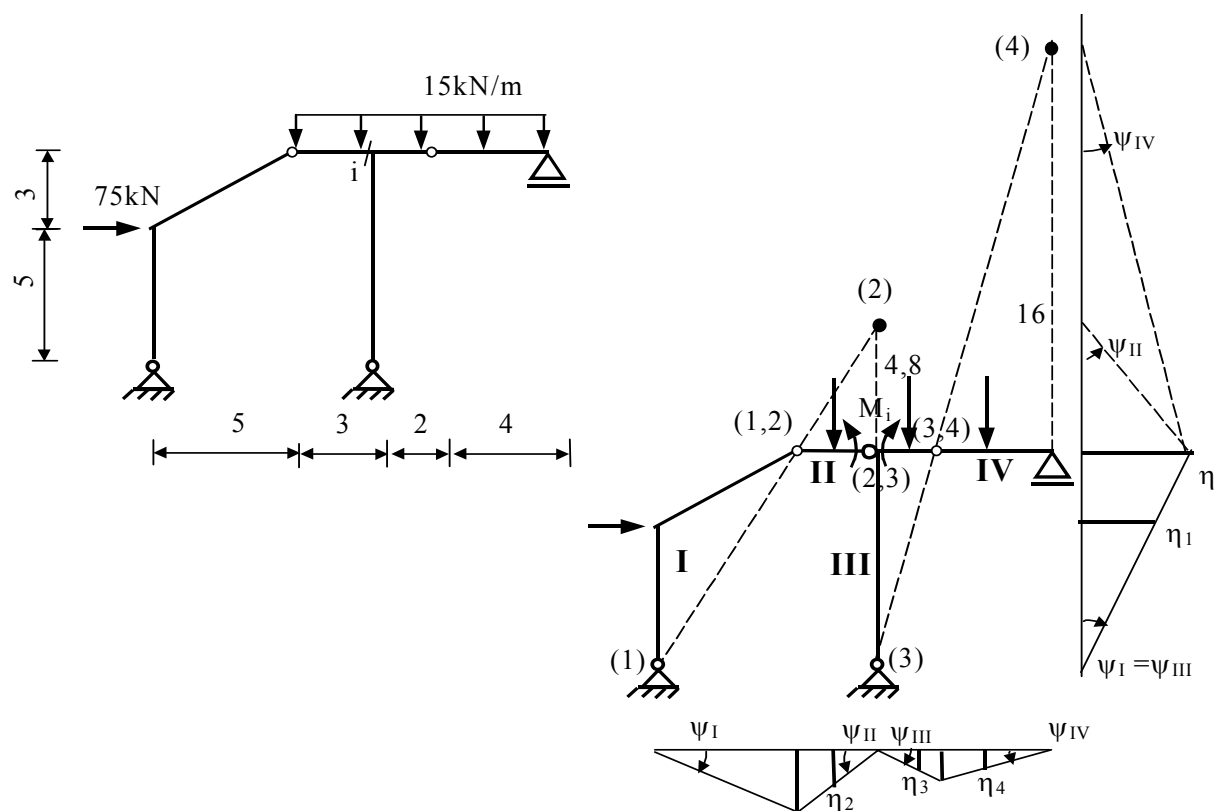
$$\eta_1 = 1,5\psi_1; \quad \eta_2 = 3\psi_2 = 1,665\psi_1;$$

$$\eta_4 = 7,5\psi_3 = 4,1625\psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot (-60 \cdot 1,5 - 120 \cdot 1,665 - M_i - M_i \cdot 0,555 + 60 \cdot 4,1625) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezulta $M_i = -25,75\text{kNm}$

Problema 7.7 (fig.7.7) Momentul încovoietor M_i



- Fig.7.7 -

Calculul momentului încovoietor M_i

$$\begin{matrix} (2) \end{matrix} \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2), (2,3), (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \end{matrix} \begin{cases} (4), (3,4), (3) \\ (4) \perp \text{ reazem} \end{cases}$$

$$\delta L = 0;$$

$$75 \cdot \eta_1 + 15 \cdot 3 \cdot \eta_2 + 15 \cdot 2 \cdot \eta_3 + 15 \cdot 4 \cdot \eta_4 + M_i \cdot \psi_2 + M_i \cdot \psi_3 = 0$$

$$\psi_2 = \frac{5}{3} \psi_1; \quad \psi_4 = \frac{1}{2} \psi_3; \quad \psi_1 = \psi_3 \quad \eta_1 = 5 \psi_1; \quad \eta_2 = 1,5 \psi_2 = 2,5 \psi_1;$$

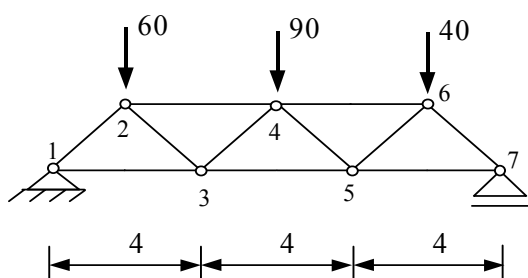
$$\eta_3 = 1 \psi_3 = \psi_1; \quad \eta_4 = 2 \psi_4 = \psi_3;$$

$$\psi_1 \cdot \left(75 \cdot 5 + 45 \cdot 2,5 + 30 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + M_i \cdot \frac{5}{3} + M_i \cdot 1 \right) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezulta $M_i = -216,563 \text{ kNm}$

Problema 7.8 (fig.7.8) Să se determine eforturile din barele 3-5 și 4-5

Calculul efortului N_{35}



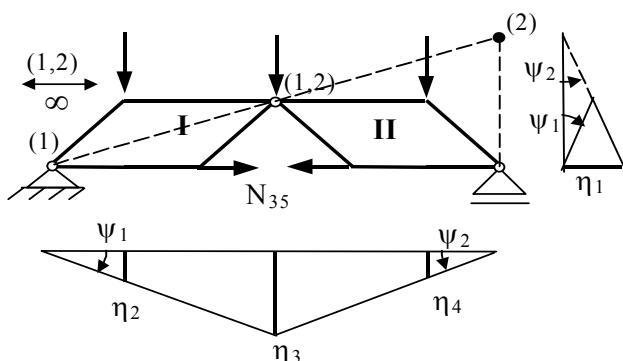
$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

$$\delta L = 0; \\ 60 \cdot \eta_2 + 90 \cdot \eta_3 + 40 \cdot \eta_4 - N_{35} \cdot \eta_1 = 0$$

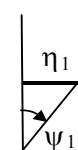
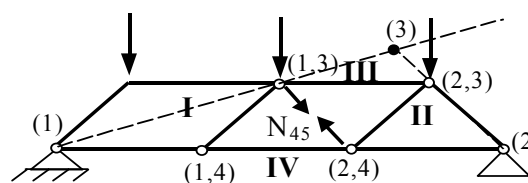
$$\psi_1 = \psi_2; \quad \eta_2 = 2\psi_1; \quad \eta_3 = 6\psi_1; \\ \eta_4 = 4\psi_2 = 4\psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot (60 \cdot 2 + 90 \cdot 6 + 40 \cdot 2 - N_{35} \cdot 4) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezulta $N_{35} = 185 \text{ kN}$



Calculul efortului N_{45}



$$(1,2) \begin{cases} (1,2), (3,1), (3,2) \\ (1,2), (4,1), (4,2) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{reazem} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (3), (1,3), (1) \\ (3), (2,3), (2) \end{cases}$$

$$\delta L = 0; \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 60 \cdot \eta_2 + 90 \cdot \eta_3 - 40 \cdot \eta_4 + N_{45} \sin \alpha \cdot \eta_3 + \\ + N_{45} \cos \alpha \cdot \eta_1 + N_{45} \sin \alpha \cdot \eta_6 = 0$$

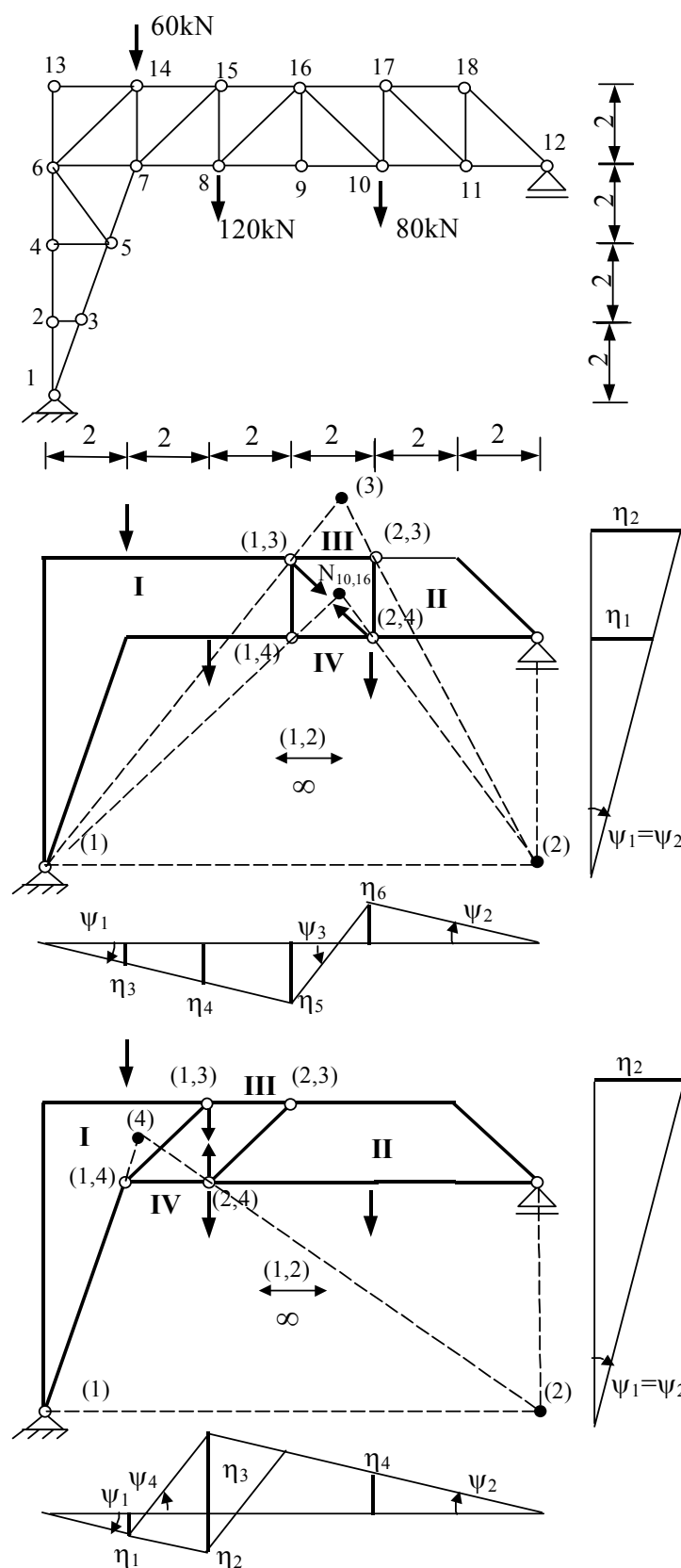
$$\psi_1 = \psi_2; \quad \eta_1 = 2\psi_1; \quad \eta_2 = 2\psi_1; \\ \eta_3 = 6\psi_1; \quad \eta_4 = 2\psi_1; \\ \eta_5 = 4\psi_1; \quad \eta_6 = 4\psi_2;$$

- Fig.7.8 -

$$\psi_1 \cdot \left(60 \cdot 2 + 90 \cdot 6 - 40 \cdot 2 + N_{45} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 \right) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă $N_{45} = -68,354 \text{ kN}$

Problema 7.9 (fig.7.9) Să se determine eforturile din barele 10-16 și 8-15



Calculul efortului N_{10-16}

$$(1,2) \begin{cases} (1,2), (3,1), (3,2) \\ (1,2), (4,1), (4,2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{ reazem} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} (4), (1,4), (1) \\ (4), (2,4), (2) \end{cases}$$

$$\delta L = 0; \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$60 \cdot \eta_3 + 120 \cdot \eta_4 - 80 \cdot \eta_6 + N_{10-16} \sin \alpha \cdot \eta_5 + N_{10-16} \cos \alpha \cdot \eta_2 + N_{10-16} \sin \alpha \cdot \eta_6 - N_{10-16} \cos \alpha \cdot \eta_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2; & \eta_1 &= 6\psi_1; & \eta_2 &= 8\psi_1; \\ & & \eta_3 &= 2\psi_1; & \eta_4 &= 4\psi_1; \\ \eta_5 &= 6\psi_1; & \eta_6 &= 4\psi_2 = 4\psi_1; \end{aligned}$$

$$\psi_1 \cdot (60 \cdot 2 + 120 \cdot 4 - 80 \cdot 4 + N_{10-16} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă

$$N_{10-16} = -39,398 \text{ kN}$$

Calculul efortului N_{8-15}

$$(1,2) \begin{cases} (1,2), (3,1), (3,2) \\ (1,2), (4,1), (4,2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} (2), (1,2), (1) \\ (2) \perp \text{ reazem} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} (4), (1,4), (1) \\ (4), (2,4), (2) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} (3), (1,3), (1) \\ (3), (2,3), (2) \end{cases}$$

- Fig.7.9 -

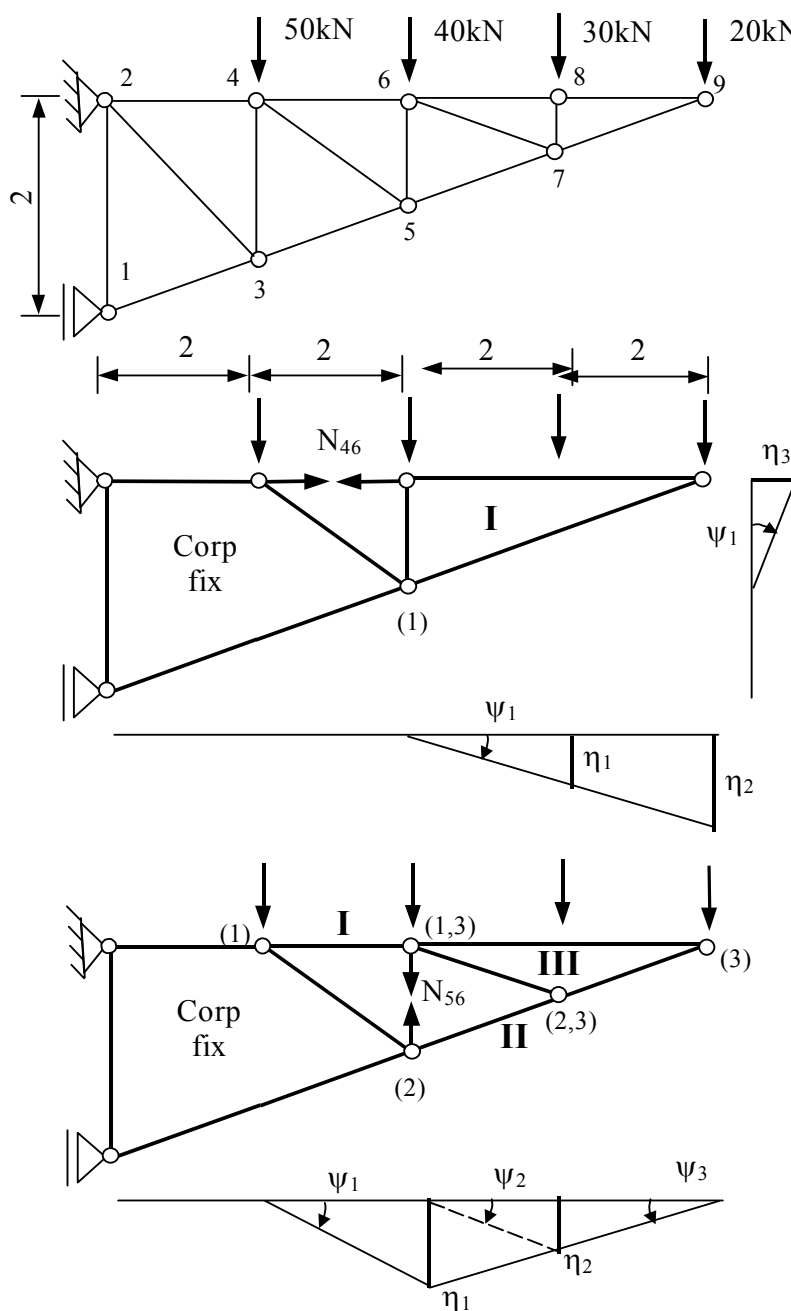
$$\delta L = 0; \quad 60 \cdot \eta_1 - 120 \cdot \eta_3 - 80 \cdot \eta_4 + N_{8-15} \cdot \eta_2 + N_{8-15} \cdot \eta_3 = 0$$

$$\psi_1 = \psi_2; \quad \eta_1 = 2\psi_1; \quad \eta_2 = 4\psi_1; \quad \eta_3 = 8\psi_2 = 8\psi_1; \quad \eta_4 = 4\psi_2 = 4\psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot (60 \cdot 2 - 120 \cdot 8 - 80 \cdot 4 + N_{8-15} \cdot 4 + N_{8-15} \cdot 8) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă $N_{8-15} = 99,66 \text{ kN}$

Problema 7.10 (fig.7.10) Să se determine eforturile din barele 4-6 și 5-6



Calculul efortului N_{46}

$$\delta L = 0;$$

$$30 \cdot \eta_1 + 20 \cdot \eta_2 - N_{46} \cdot \eta_3 = 0$$

$$\eta_1 = 2\psi_1; \quad \eta_2 = 4\psi_1;$$

$$\eta_3 = 1\psi_1$$

$$\psi_1 \cdot (30 \cdot 2 + 20 \cdot 4 - N_{46} \cdot 1) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă

$$N_{46} = 140 \text{ kN}$$

Calculul efortului N_{56}

$$\delta L = 0;$$

$$N_{56} \cdot \eta_1 + 40 \cdot \eta_1 + 30 \cdot \eta_2 = 0$$

$$2\psi_1 = 4\psi_3; \quad \psi_3 = \frac{1}{2}\psi_1$$

$$\eta_1 = 2\psi_1; \quad \eta_2 = 2\psi_3 = \psi_1;$$

$$\psi_1 \cdot (N_{56} \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 30) = 0$$

Pentru $\psi_1 \neq 0$ rezultă

$$N_{56} = -55 \text{ kN}$$

- Fig.7.10 -